

**Das Empfindlichkeitsverhalten elektrischer
Netzwerke unter dem Gesichtspunkt
minimaler Gesamtempfindlichkeit**

**Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen - Nürnberg
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur**

**vorgelegt von
Bernhard Huber**

Erlangen 1973

1973 353

Das Empfindlichkeitsverhalten elektrischer Netzwerke unter dem Gesichtspunkt minimaler Gesamtempfindlichkeit

**Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen - Nürnberg
zur Erlangung des Grades
Doktor - Ingenieur**

**vorgelegt von
Bernhard Huber**

Erlangen 1973



Als Dissertation genehmigt von der

Technischen Fakultät

der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 24. 4. 1973

Tag der Promotion: 16. 7. 1973

Dekan: Prof. Dr. rer. nat. G. Meinardus

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen
Prof. Dr. phil. nat. H. Schlitt

V o r w o r t

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik der Universität Erlangen-Nürnberg.

Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen, dem Leiter dieses Instituts, auf dessen Anregung diese Arbeit zurückgeht, gilt mein besonderer Dank für die wohlwollende Förderung, die eingehende Durchsicht der Arbeit und die sich daraus ergebenden wertvollen Ratschläge.

Ebenfalls danken möchte ich Herrn Prof. Dr.phil.nat. H. Schlitt für die Übernahme des Korreferates.

Weiterhin danke ich den Mitarbeitern des Instituts für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik für manche anregende Diskussionen und Hinweise.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Zusammenfassung	7
I. EMPFINDLICHKEITSEIGENSCHAFTEN VERSCHIEDENER KLASSEN PASSIVER RLC-NETZWERKE	
1.1 Das Problem	9
1.2 Definition der Empfindlichkeit	10
1.3 Empfindlichkeiten höherer Ordnung	15
1.4 Invarianzeigenschaften der Summenempfindlichkeiten passiver, linearer RLC-Netzwerke	16
1.5 Energiebeziehungen und Empfindlichkeit	24
1.6 Vorzeicheneigenschaften der Empfindlichkeiten	28
II. DAS EMPFINDLICHKEITSOPTIMALE PASSIVE RLC-NETZWERK	
2.1 Statistische Betrachtungsweise des Empfindlich- keitsproblems	41
2.2 Definition des empfindlichkeitsoptimalen Netzwerks	45
2.3 Existenz und Eigenschaften empfindlichkeitsoptimaler RLC-Netzwerke	47
2.3.1 Zweipole aus einer Bauelementesorte	47
2.3.2 Empfindlichkeitsoptimale Reaktanzzweipole	51
2.3.3 Der allgemeine RLC-Zweipol	54
2.3.4 Zum allgemeinen empfindlichkeitsoptimalen RLC- Netzwerk	56
2.4 Empfindlichkeitsoptimierung	63
2.5 Prinzipielle Gesichtspunkte zur Synthese von Netz- werken mit gutem Empfindlichkeitsverhalten	69
2.5.1 Reaktanznetzwerke	70
2.5.2 RC-Netzwerke	88

2.6 Toleranzoptimierung	102
2.6.1 Problemstellung	102
2.6.2 Ermittlung des optimalen Toleranzsatzes	103
2.6.3 Diskussion des Ergebnisses	105
2.6.4 Vergleich der Ergebnisse mit HAYKIN	109
2.6.5 Numerische Rechnungen und diskrete Toleranzen	109
III. DER ÜBERTRAGER ALS EMPFINDLICHKEITSTHEORETISCHES ELEMENT	
3.1 Physikalische Grundlagen	117
3.2 Wahl der unabhängigen Parameter und Empfindlichkeits- eigenschaften des festverkoppelten Übertragers	118
3.3 Einfluß von festverkoppelten Übertragern auf die Ge- samtempfindlichkeit eines Netzwerks	121
3.4 Der ideale Übertrager und seine Empfindlichkeit	128
IV. EMPFINDLICHKEITS- UND TOLERANZPROBLEME BEI AKTIVEN NETZWERKEN	
4.0 Vorbemerkungen	133
4.1 Die Charakterisierung der Empfindlichkeit aktiver Netz- werkelemente	134
4.2 Summenempfindlichkeiten bei aktiven RC-Netzwerken	141
4.3 Grundsätzliche Bemerkungen zur Synthese aktiver RC- Netzwerke mit gutem Empfindlichkeitsverhalten	143
4.3.1 Die Gesamtempfindlichkeit eines aktiven Netzwerks	143
4.3.2 Verhalten der Gesamtempfindlichkeit bei Auf- spalten einer Übertragungsfunktion in Teil- funktionen zweiten Grades	147
4.3.3 Empfindlichkeitsoptimale Netzwerke zweiten Grades	163
Literaturverzeichnis	180

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit dem für die Netzwerktheorie wichtigen Empfindlichkeitsproblem. Die zahlreichen Veröffentlichungen auf diesem Gebiet beschäftigen sich vorwiegend mit der Berechnung von Empfindlichkeiten oder der Entwicklung von Netzwerken mit geringer Empfindlichkeit gegenüber bestimmten Parametern. Dagegen war es Hauptziel dieser Arbeit, zunächst das theoretische Minimum für die Gesamtempfindlichkeit eines Netzwerks bei gleichzeitiger Berücksichtigung aller Parameter herauszufinden; anschließend wird die Frage diskutiert, ob diese Grenzen durch RLC-Netzwerke (passiv, aktiv) realisiert werden können. Dazu wird folgendermaßen vorgegangen:

Im Kapitel I sind neben einer Diskussion der zur Empfindlichkeitsbeschreibung verwendeten Größen die allgemeinen Eigenschaften der Empfindlichkeiten, darunter einige neue Sätze, zusammengestellt.

Darauf aufbauend kann in Kapitel II die zentrale Frage nach der Existenz passiver RLC-Netzwerke mit minimaler Gesamtempfindlichkeit in einem Frequenzbereich untersucht werden. Dieses wichtige Problem wird hier erstmals allgemein diskutiert. Die sich ergebenden Folgerungen sind anschließend anhand einer Analyse des Empfindlichkeitsverhaltens von äquivalenten Reaktanznetzwerken und RC-Netzwerken dargestellt.

Eng mit dem Empfindlichkeitsproblem hängt die Frage nach der Größe der Bauelementetoleranzen für praktische Schaltungen zusammen. Die Streuung der interessierenden reellen Systemgröße soll minimal sein. Es wird ein Verfahren vorgestellt, das eine geschlossene Lösung für den optimalen Toleranzsatz liefert. Aus dem Ergebnis können allgemeine Eigenschaften von Netzwerken mit geringer Toleranzempfindlichkeit abgeleitet werden.

Im Kapitel III wird zum erstenmal der Übertrager als empfindlichkeitstheoretisches Element untersucht. Ausgegangen wird dabei von den physikalischen Grundgleichungen dieses Netzwerkelements. Theoretische Überlegungen und praktische Beispiele erge-

ben, daß Übertragerlose Realisierungen vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus im allgemeinen vorzuziehen sind.

Im Kapitel IV werden die Empfindlichkeitsprobleme aktiver RC-Netzwerke behandelt. Es liegt die Überlegung zugrunde, daß nur bei gleichzeitiger Berücksichtigung der aktiven und passiven Parameter die Gesamtempfindlichkeit einer Netzwerkfunktion realistisch ermittelt werden kann. Die Schwierigkeiten beim Vergleich aktiver und passiver Parameter werden eingehend erörtert und Lösungsvorschläge für die auftretenden Probleme gemacht. Anschließend werden die Frage der Aufspaltung einer Übertragungsfunktion in Teilfunktionen niederen Grades, das Problem der Gruppierung von Pol- und Nullstellen, sowie die verschiedenen Nennerpolynomzerlegungen unter dem Gesichtspunkt geringer Gesamtempfindlichkeit auf einer allgemeinen Grundlage erörtert. Schließlich wird noch die Frage nach der Existenz empfindlichkeitsoptimaler Schaltungen zweiten Grades untersucht. Die theoretische untere Schranke für die Gesamtempfindlichkeit wird berechnet und an Beispielen gezeigt, daß sie annähernd erreicht werden kann.

I. EMPFINDLICHKEITSEIGENSCHAFTEN VERSCHIEDENER KLASSEN PASSIVER RLC-NETZWERKE

1.1 Das Problem

Die große Bedeutung von Empfindlichkeitsfragen in der Netzwerktheorie läßt sich folgendermaßen begründen: Die Netzwerksynthese liefert Realisierungen, deren Elemente mehr oder weniger exakt angegebene Werte besitzen müssen, damit die an die Netzwerke gestellten Anforderungen erfüllt werden. Bei einer praktischen Realisierung besitzen jedoch die Bauelemente aufgrund fertigungsbedingter Toleranzen nur annähernd die geforderten Werte. Die realisierte Netzwerkfunktion stimmt deshalb auch nur näherungsweise mit der theoretisch errechneten Sollfunktion überein. Das führt zu folgenden Fragen, die die zentralen Themen dieser Arbeit bilden:

1. Welche allgemeinen Empfindlichkeits- bzw. Toleranzeigenschaften besitzen die verschiedenen Klassen von Netzwerken?
2. Es wird ein Maß benötigt, um verschiedene äquivalente Realisierungen einer Netzwerkfunktion bezüglich ihrer "Gesamtempfindlichkeit" zu beschreiben und zu vergleichen. Insbesondere interessieren dann die Eigenschaften der Netzwerke mit geringer Gesamtempfindlichkeit.
3. Kann man für eine Netzwerkfunktion bei gegebenem Schaltungsaufwand eine Realisierung finden, die ein besseres Empfindlichkeitsverhalten aufweist als alle anderen vergleichbaren äquivalenten Realisierungen? *)

Um diese Fragen beantworten zu können, muß zunächst der Begriff der Einflußempfindlichkeit eines Parameters auf eine Netzwerkfunktion festgelegt werden. In der anschließenden Diskussion werden seine Vor- und Nachteile, sowie die Grenzen der Anwendbarkeit erörtert.

*) Das muß noch nicht bedeuten, daß vom praktischen Standpunkt aus dieses Netzwerk vorzuziehen ist, da neben der Empfindlichkeit noch andere Gesichtspunkte, wie Wertebereich der Netzwerkelemente usw. eine Rolle spielen.

1.2 Definition der Empfindlichkeit

Gegeben sei eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n, p)$, die von n reellen Parametern $x_1, \dots, x_n$ und dem komplexen Frequenzparameter $p = \sigma + j\omega$ abhängt. Um den Einfluß eines Parameters x_μ auf die Funktion f zu bestimmen, wurde von BODE 1945 folgende Größe vorgeschlagen [1]:

$$\bar{S}_{x_\mu}^f = \frac{\partial(\ln f)}{\partial(\ln x_\mu)} = \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \frac{x_\mu}{f} = \frac{\partial f/f}{\partial x_\mu/x_\mu}. \quad (1.1)$$

(BODE benutzte zunächst den reziproken Ausdruck, was sich aber nicht durchsetzte). Dieser im allgemeinen vom Frequenzparameter p abhängige Ausdruck wird als vollrelative Empfindlichkeit (sensitivity) bezeichnet und beschreibt die relative differentielle Änderung der Funktion f , bezogen auf die relative differentielle Änderung des Parameters x_μ . Zur numerischen Berechnung der Ausdrücke $\bar{S}_{x_\mu}^f$ existieren verschiedene Verfahren; näheres findet sich in dem Übersichtsartikel [15] sowie in den Arbeiten [2, 10, 56, 57].

Die Funktion f kann eine beliebige reell- oder komplexwertige Netzwerkfunktion sein. Eine Voraussetzung für die Berechnung von Empfindlichkeiten nach Gl.(1.1) ist die gegenseitige Unabhängigkeit der Parameter x_μ . Das bedeutet, daß zunächst nur solche Netzwerkelemente betrachtet werden können, die durch eine Größe hinreichend beschrieben werden, also Ohmwiderstände, Induktivitäten und Kapazitäten. Handelt es sich um mehrtorige Bausteine, wie Verstärker, Gyrationen oder Negativ-Impedanz-Konverter, so versucht man deren Klemmenverhalten ebenfalls durch nur eine Kenngröße zu beschreiben (Verstärkungsfaktor, Gyrationkonstante, Konversionsfaktor). Die vielen Empfindlichkeitsuntersuchungen an aktiven Netzwerken machen hiervon Gebrauch (siehe Kap.IV). Der allgemeine Übertrager als zweitoriges Element läßt sich dagegen nicht durch eine Größe allein beschreiben. In der Literatur über Empfindlichkeitsprobleme wurden bisher aus diesem Grund nur Netzwerke ohne Übertrager untersucht. Im Kapitel III wird erstmals eine Möglichkeit gezeigt, wie auch der Übertrager als empfindlichkeitstheoretisches Element behandelt werden kann.

Obwohl zur Bestimmung der Einflußempfindlichkeit eines Parameters x_μ auf eine Netzwerkfunktion f meist Gl.(1.1) verwendet

wird, besitzt dieses Maß gewisse Schwächen. $\bar{S}_\mu^f$ als differentielle Größe hat zwar den Vorteil, daß sie mathematisch relativ einfach behandelt werden kann. In der Praxis treten aber endliche Änderungen der Elementewerte auf, nicht nur sehr kleine. Außerdem strebt $\bar{S}_{x_\mu}^f$ an Nullstellen von f im allgemeinen gegen Unendlich, obwohl eine kleine Parameteränderung in der Regel nur eine endliche Änderung des Funktionswerts bewirkt. Selbst für Elemente x_μ , die auf eine Nullstelle überhaupt keinen Einfluß haben, besitzt $\bar{S}_{x_\mu}^f$ in der Regel einen endlichen, von Null verschiedenen Wert, wie das folgende Beispiel zeigt.

Gegeben sei die Funktion

$$f(x_1, \dots, x_n, p) = \frac{Z(x_1, \dots, x_n, p)}{N(x_1, \dots, x_n, p)}. \quad (1.2)$$

Dann gilt zunächst allgemein

$$\bar{S}_{x_\mu}^f = \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x_\mu} - \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial x_\mu} \right) x_\mu; \quad \mu = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Der Zähler von f und damit auch die Lage einer Nullstelle p_0 von f hängt nicht von x_1 ab, d.h. es gilt

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = 0, \quad p \text{ beliebig.} \quad (1.4)$$

Der Ausdruck $\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x_1}$ verschwindet damit an allen Stellen mit $Z(p) \neq 0$. Aus Stetigkeitsgründen ist es sinnvoll, dies auch an einer Nullstelle p_0 von $Z(p)$ zu fordern, so daß schließlich mit Gl.(1.3) für beliebiges p

$$\bar{S}_{x_1}^f = \frac{\partial N}{\partial x_1} \frac{x_1}{N} \quad (1.5)$$

gilt. Im allgemeinen wird dieser Ausdruck für $p=p_0$ von Null verschieden sein, obwohl jede Änderung von x_1 die Lage der Nullstelle p_0 unbeeinflusst läßt.

Ein weiteres Beispiel für die Grenzen der Anwendbarkeit der Gl. (1.1) stammt von ORCHARD [14]. Betrachtet wird ein Reaktanzbandfilter, das zwischen zwei gleich großen Ohmwidständen betrieben wird (Bild 1).

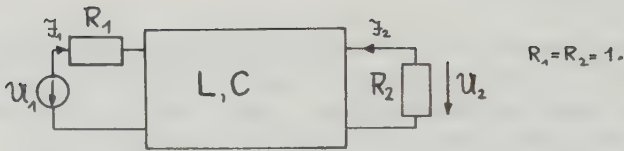


Bild 1

Dabei sind die Spannungen U_p, U_2 und die Ströme I_1, I_2 wie auch im folgenden als Zeigergrößen im Sinn der komplexen Wechselstromrechnung aufzufassen. Bei einer Frequenz ω_0 mit verschwindender Dämpfung $\alpha = -\ln|2f(j\omega)|$, wobei $f(p) = U_2/U_1$, kann dann durch eine Abweichung eines beliebigen Elements x_p des Reaktanzzweitors vom Sollwert $\bar{x}_p$ die Dämpfung α nur vergrößert werden. Das bedeutet, daß bei festgehaltenem $\omega = \omega_0$ der Verlauf der Funktion $\alpha(x_p)$ für jedes Element an der Stelle $\bar{x}_p$ ein Minimum besitzt. Wegen der Eigenschaften von $f(p)$ [47] ist jede Funktion $\alpha(x_p)$ in einer endlichen Umgebung von $\bar{x}_p$ sowie an der Stelle $\bar{x}_p$ selbst differenzierbar und es gilt $\bar{s}_{x_p}^\alpha(\omega_0) \neq 0$ für alle Netzwerkelemente x_p . Empfindlichkeit Null heißt also nicht in jedem Fall, daß eine Änderung eines Netzwerkelements die Netzwerkfunktion nicht ändert.

Ein Teil der Schwierigkeiten läßt sich umgehen, wenn anstelle von Gl.(1.1) die sogenannten halbrelativen Empfindlichkeiten

$$S_{x_p}^f = \frac{\partial f}{\partial x_p} x_p \quad (1.6)$$

verwendet werden. Vor allem das Empfindlichkeitsverhalten an Nullstellen einer Zweipol- oder Übertragungsfunktion läßt sich mit Gl.(1.6) realistischer beschreiben. Im folgenden werden deshalb mit $S_{x_p}^f$ stets die halbrelativen Empfindlichkeiten bezeichnet, während vollrelative Empfindlichkeiten durch einen zusätzlichen Querstrich kenntlich gemacht werden.

Allerdings ergeben sich auch bei Verwendung von Gl.(1.6) Probleme, falls nicht die Netzwerkfunktion selbst, sondern eine abgeleitete Größe wie zum Beispiel $|f|^2$ betrachtet wird. Jetzt gilt nämlich mit $|f|^2 = f \cdot f^*$:

$$\frac{\partial |f|^2}{\partial x_p} x_p = f \frac{\partial f^*}{\partial x_p} x_p + f^* \frac{\partial f}{\partial x_p} x_p \quad (1.7)$$

An Nullstellen von f ist dieser Ausdruck stets Null für beliebiges x_p , obwohl die Lage der Nullstellen sehr wohl durch Para-

meteränderungen beeinflusst werden kann.

Anstelle den unmittelbaren Einfluß eines Parameters auf die Netzwerkfunktion über Gl.(1.1) oder Gl.(1.6) zu betrachten, werden besonders bei aktiven Netzwerken oft die Pol- und Nullstellenempfindlichkeiten herangezogen. Gegeben sei wieder eine Netzwerkfunktion $f(p)$ als Quotient zweier Polynome des Frequenzparameters p :

$$f(p) = H \frac{\prod_{\mu=1}^n (p - z_{\mu})}{\prod_{\nu=1}^m (p - p_{\nu})} = \frac{Z(p)}{N(p)} \quad (1.8)$$

Die Empfindlichkeit eines Pols p_{ν} (analog einer Nullstelle z_{μ}) bezüglich eines Netzwerkparameters k ist

$$S_k^{p_{\nu}} = \frac{\partial p_{\nu}}{\partial k} k \quad (1.9)$$

Der Zusammenhang zwischen den PN-Empfindlichkeiten und den klassischen Empfindlichkeiten Gl.(1.1) läßt sich folgendermaßen herstellen. Aus Gl.(1.8) ergibt sich

$$\ln f = \ln H + \sum_{\mu=1}^n \ln(p - z_{\mu}) - \sum_{\nu=1}^m \ln(p - p_{\nu}) \quad (1.10)$$

und hieraus durch Differentiation nach k :

$$\frac{\partial f}{\partial k} \frac{k}{f} = \frac{\partial H}{\partial k} \frac{k}{H} - \sum_{\mu=1}^n \frac{S_k^{z_{\mu}}}{(p - z_{\mu})} + \sum_{\nu=1}^m \frac{S_k^{p_{\nu}}}{(p - p_{\nu})} \quad (1.11)$$

Man sieht, daß der Beitrag der Polempfindlichkeiten $S_k^{p_{\nu}}$ zur Gesamtempfindlichkeit $\bar{S}_k^f$ besonders in der Umgebung der Polstelle p_{ν} wesentlich ist. Analoges gilt für die Nullstellen. Liegen aber die Pole und Nullstellen fern von der imaginären Achse der komplexen Frequenzebene oder liegt der interessierende Frequenzpunkt nicht in der unmittelbaren Nachbarschaft eines Pols oder einer Nullstelle, dann ist die klassische Empfindlichkeitsdefinition Gl.(1.1) oder Gl.(1.6) vorzuziehen. Dennoch lassen sich interessante und für spätere Anwendungen wichtige Aussagen aus den PN-Empfindlichkeiten gewinnen. Zerlegt man etwa den Nenner von Gl.(1.8) in der Form ^{*)}

$$N(p) = \prod_{\nu=1}^m (p - p_{\nu}) = A(p) - k B(p), \quad (1.12)$$

*) Eine solche Zerlegung erweist sich z.B. bei der Realisierung der Netzwerkfunktion als aktives RC-Netzwerk [27] mit geeigneten Polynomen $A(p)$, $B(p)$ als sinnvoll.

wobei k ein reeller Parameter ist, dann folgt zunächst durch Differentiation von Gl.(1.12) nach k :

$$-\sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial p_q}{\partial k} \right) \left\{ \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq q}}^m (p - p_v) \right\} = -B(p). \quad (1.13)$$

Die Empfindlichkeit des Pols p_α erhält man schließlich aus Gl.(1.13) mit $p \rightarrow p_\alpha$ zu:

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial k} k \Big|_{p=p_\alpha} = \frac{k B(p_\alpha)}{\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq \alpha}}^m (p_\alpha - p_v)}. \quad (1.14)$$

Man sieht, daß zu p_α eng benachbarte Polstellen eine sehr große Polempfindlichkeit bewirken und deshalb möglichst vermieden werden sollten. Für aktive Netzwerke existiert aber ein im Kapitel IV beschriebenes Verfahren, das trotz benachbarter Polstellen durch Aufspaltung der Übertragungsfunktion eine vertretbare Polstellenempfindlichkeit liefert.

Die PN-Empfindlichkeiten besitzen den Nachteil, daß sie als komplexe Größen nicht unmittelbar experimentell gemessen werden können. Es hat sich daher eingebürgert, speziell bei den wichtigen aktiven Netzwerken zweiten Grades die vollrelativen Empfindlichkeiten eines Gütefaktors Q und einer Frequenz ω_0 (im folgenden Q - bzw. ω_0 -Empfindlichkeit genannt) bezüglich der Parameter des Netzwerks anzugeben. Beide Größen sind reell und können experimentell nachgeprüft werden. Enthält eine Netzwerkfunktion den Pol $p_\mu = -\sigma_\mu + j\omega_\mu$, so führt das zusammen mit p_μ^* zu der charakteristischen Gleichung

$$(p - p_\mu)(p - p_\mu^*) = p^2 + 2\sigma_\mu p + \sigma_\mu^2 + \omega_\mu^2 = p^2 + 2\sigma_0 p + \omega_0^2 = 0. \quad (1.15)$$

Hierbei wurde ω_0 durch

$$\omega_0 = \sqrt{\sigma_\mu^2 + \omega_\mu^2} \quad (1.16)$$

definiert, während die Güte Q mit $\sigma_0 = \sigma_\mu$ zu

$$Q = \frac{\omega_0}{2\sigma_0} \quad (1.17)$$

festgelegt wird. Als Q - bzw. ω_0 -Empfindlichkeit werden die Größen

$$S_x^Q = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{x}{Q} \quad (1.18)$$

und

$$\bar{S}_x^{\omega_0} = \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \frac{x}{\omega_0} \quad (1.19)$$

bezeichnet. Da Q und ω_0 stets von Null verschieden sind, treten keine Schwierigkeiten bei Verwendung von vollrelativen Empfindlichkeiten auf. Vor allem bei Filtern mit hoher Güte genügt meistens für Vergleichszwecke die Angabe der Q - und ω_0 -Empfindlichkeiten völlig, da dann hauptsächlich das Verhalten des Netzwerks in der Umgebung von ω_0 interessiert und die Empfindlichkeitseigenschaften der Netzwerkfunktion in diesem Bereich durch die Größen $\bar{S}_x^Q$ und $\bar{S}_x^{\omega_0}$ ausreichend charakterisiert werden.

1.3 Empfindlichkeiten höherer Ordnung

Um auch in den Fällen, wo die ersten Ableitungen einer Netzwerkfunktion nicht ausreichen, das Empfindlichkeitsverhalten beurteilen zu können, wird in letzter Zeit verstärkt auf höhere Ableitungen der Funktion bezüglich ihrer Parameter zurückgegriffen. Speziell die zweiten Ableitungen sind von Interesse.

Betrachtet man eine Zweipol- oder Übertragungsfunktion f (keine abgeleitete Größe wie Betrag, Dämpfung, Phase usw.) in einem passiven, linearen RLC-Netzwerk, so läßt sich f als Quotient zweier Polynome des Frequenzparameters p darstellen:

$$f(p) = \frac{Z(p)}{N(p)} = \frac{\sum_{\mu=1}^m a_{\mu} p^{\mu}}{\sum_{\nu=1}^n b_{\nu} p^{\nu}} \quad (1.20)$$

Die Koeffizienten a_{μ}, b_{ν} sind lineare Funktionen bezüglich der jeweiligen Netzwerkelemente x_k ($k=1, \dots, q$), wobei q die Gesamtzahl der Netzwerkelemente darstellt. Gl.(1.20) läßt sich daher als gebrochen lineare Funktion in x_k schreiben:

$$f(p) = \frac{A_k(p) + x_k B_k(p)}{C_k(p) + x_k D_k(p)}, \quad x_k = R_k, L_k, C_k. \quad (1.21)$$

Die Größen A_k, B_k, C_k, D_k sind von x_k unabhängig. Damit erhält man

$$S_{x_k}^f = \frac{\partial f}{\partial x_k} x_k = \frac{N \frac{\partial Z}{\partial x_k} - Z \frac{\partial N}{\partial x_k}}{N^2} x_k = \frac{(B_k C_k - A_k D_k)}{(C_k + x_k D_k)^2} x_k. \quad (1.22)$$

Der Zähler von Gl.(1.22) hängt nur multiplikativ von x_k ab. Für Empfindlichkeit Null, d.h. $S_{x_k}^f(p_0)=0$, muß daher unter der Voraussetzung $C_k(p_0) + x_k D_k(p_0) \neq 0$ und $p_0 \neq 0, p_0 \neq \infty$ die Bedingung

$A_k D_k = B_k C_k$ erfüllt sein (falls f eine Netzwerkfunktion vom Typ $f = \mathcal{U}_1/\mathcal{Z}_1$, $f = \mathcal{U}_2/\mathcal{U}_1$, $f = \mathcal{Z}_2/\mathcal{Z}_1$ oder $f = \mathcal{U}_2/\mathcal{Z}_1$ ist und nicht eine abgeleitete Größe wie $|f|^2$ in Gl.(1.7)). Damit wird aber für $p = p_0$ der Wert von $f(p_0) = A_k/C_k$ völlig unabhängig von der Größe des Parameters x_k . Wie im Beweis von Satz 3 noch gezeigt wird, braucht im Spezialfall $C_k(p_0) + x_k D_k(p_0) = 0$ die Unabhängigkeit von $f(p_0)$ bezüglich eines Parameters x_k nicht unbedingt $S_{x_k}^f(p_0) = 0$ zur Folge haben.

Differenziert man $\partial f / \partial x_k$ nach x_l , dann ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{N \frac{\partial^2 Z}{\partial x_k \partial x_l} - Z \frac{\partial^2 N}{\partial x_k \partial x_l}}{N^2} - \frac{1}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l} + \frac{\partial N}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right). \quad (1.23)$$

Für den wichtigen Spezialfall $k=l$ vereinfacht sich Gl.(1.23) wegen

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial x_k^2} = 0 \quad (1.24)$$

zu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = - \frac{2}{N} \frac{\partial N}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_k}. \quad (1.25)$$

In der Form ähnliche Ergebnisse für die zweiten Ableitungen finden sich bei NEILL [9] und GODDARD [10]. Zur Lösung der Aufgabe wurde dort von einer Knotenanalyse ausgegangen.

1.4 Invarianzeigenschaften der Summenempfindlichkeiten passiver, linearer RLC-Netzwerke

In den folgenden Abschnitten werden neben bekannten auch mehrere neue Eigenschaften der Empfindlichkeiten von passiven, linearen RLC-Netzwerken beschrieben. Sie werden sich später bei Fragen zur Empfindlichkeitsoptimierung als bedeutsam erweisen und ermöglichen teilweise eine anschauliche Deutung des Empfindlichkeitsproblems.

Gegeben sei ein passives, lineares Netzwerk, das aus r Ohmwiderständen, l Induktivitäten und c Kapazitäten aufgebaut ist. In diesem Netzwerk wird eine beliebige Impedanzfunktion^{*)} $f = f(R_1, \dots, R_r, L_1, \dots, L_l, E_1, \dots, E_c, p)$ betrachtet, wobei E_τ die reziproken Kapazitäten sind. Jede solche Impedanzfunktion läßt

*) Unter Impedanzfunktionen sollen hier und im folgenden, wenn keine zusätzlichen Angaben gemacht werden, neben Impedanzfunktionen von Zweipolen auch die Übertragungsfunktionen $\mathcal{U}_2/\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{U}_1/\mathcal{Z}_2$ von Zweitoren verstanden werden. Analoges gilt für Admittanzfunktionen. Als dimensionslose Übertragungsfunktionen werden dagegen Funktionen vom Typ $\mathcal{U}_2/\mathcal{U}_1$, $\mathcal{Z}_2/\mathcal{Z}_1$ bezeichnet.

sich dann als gebrochen rationale Funktion anschreiben. Der Zähler von $f(p) = Z(p)/N(p)$ kann dabei als Summe von Produkten der Impedanzen $R, pL, E/p$ aufgefaßt werden, wobei aus Dimensionsgründen jedes Produkt die gleiche Anzahl k voneinander verschiedener Impedanzen enthalten muß. Es gilt daher

$$Z(p) = \sum_{\mu=1}^{\nu} \left(\prod_{\sigma=1}^k z_{\sigma}^{(\mu)} \right), \quad z_{\sigma}^{(\mu)} = R, pL, E/p. \quad (1.26a)$$

In analoger Form muß sich der Nenner von $f(p)$ darstellen lassen, nur daß hier die Multiplizität $k-1$ betragen muß, da $f(p) = Z(p)/N(p)$ eine Impedanz ergeben soll.

$$N(p) = \sum_{\mu=1}^{\nu} \left(\prod_{\sigma=1}^{k-1} z_{\sigma}^{(\mu)} \right), \quad z_{\sigma}^{(\mu)} = R, pL, E/p. \quad (1.26b)$$

Bildet man nun die Summe der Empfindlichkeiten von f bezüglich aller Ohmwidestände R , Induktivitäten L und reziproken Kapazitäten E , so gilt zunächst

$$\sum_{\xi} \frac{\partial f}{\partial X_{\xi}} X_{\xi} = \frac{1}{N^2} \left(N \sum_{\xi} \frac{\partial Z}{\partial X_{\xi}} X_{\xi} - Z \sum_{\xi} \frac{\partial N}{\partial X_{\xi}} X_{\xi} \right); \quad X_{\xi} = R, L, E. \quad (1.26c)$$

Mit den Gln.(1.26a,b) folgt weiter

$$\sum_{\xi} \frac{\partial Z}{\partial X_{\xi}} X_{\xi} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \left\{ \sum_{\xi} \frac{\partial}{\partial X_{\xi}} \left(\prod_{\sigma=1}^k z_{\sigma}^{(\mu)} \right) X_{\xi} \right\} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \left\{ k \prod_{\sigma=1}^k z_{\sigma}^{(\mu)} \right\} = kZ, \quad (1.26d)$$

$$\sum_{\xi} \frac{\partial N}{\partial X_{\xi}} X_{\xi} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \left\{ \sum_{\xi} \frac{\partial}{\partial X_{\xi}} \left(\prod_{\sigma=1}^{k-1} z_{\sigma}^{(\mu)} \right) X_{\xi} \right\} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \left\{ (k-1) \prod_{\sigma=1}^{k-1} z_{\sigma}^{(\mu)} \right\} = (k-1)N. \quad (1.26e)$$

Setzt man die Gln.(1.26d,e) in Gl.(1.26c) ein, so ergibt sich in ausführlicher Form geschrieben

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} S_{R_{\mu}}^f + \sum_{\mu=1}^l S_{L_{\mu}}^f + \sum_{\mu=1}^c S_{E_{\mu}}^f = \frac{1}{N^2} (NkZ - Z(k-1)N) = +f. \quad (1.27)$$

Völlig entsprechend erhält man auf der rechten Seite von Gl.(1.27) $-f$, wenn die Netzwerkfunktion eine Admittanzfunktion darstellt, während mit f als dimensionsloser Übertragungsfunktion die rechte Seite von Gl.(1.27) Null wird. Nutzt man noch die Beziehung

$$\frac{\partial f}{\partial E_{\mu}} E_{\mu} = - \frac{\partial f}{\partial C_{\mu}} C_{\mu}, \quad (1.28)$$

so erhält man schließlich

$$\sum_{\mu=1}^r S_{K_{\mu}}^f + \sum_{\mu=1}^l S_{L_{\mu}}^f - \sum_{\mu=1}^c S_{C_{\mu}}^f = \begin{cases} +f, & \text{falls } f \text{ Impedanzfunktion} \\ -f, & \text{falls } f \text{ Admittanzfunktion} \\ 0, & \text{falls } f \text{ dimensionslose Übertragungsfunktion.} \end{cases} \quad (1.29)$$

Betrachtet man alle bezüglich einer gegebenen Funktion f äquivalenten RLC-Netzwerke, so ist die nach Gl.(1.29) zu bildende Summe der Empfindlichkeiten aller im jeweiligen Netzwerk enthaltenen Ohmwiderstände, Induktivitäten und Kapazitäten unabhängig vom betreffenden Netzwerk und hängt nur von der Netzwerkfunktion selbst ab. Die Anzahl und die Art der für eine Schaltung verwendeten Bauelemente hat also auf die Summenempfindlichkeit keinen Einfluß.

Die Gültigkeit von Gl.(1.29) wurde erstmals von BLOSTEIN [4] bewiesen. Die oben angegebene, auf topologischen Überlegungen aufgebaute Begründung stammt von HOLT, FIDLER [5].

Eine weitere ebenfalls sehr fundamentale Invarianzeigenschaft, die für Impedanz-, Admittanz- und dimensionslose Übertragungsfunktionen gültig ist, gewinnt man aus der folgenden Überlegung: Ausgehend von Gl.(1.20) seien jetzt die Zähler- und Nennerterme $a_{\mu} p^{\mu}$, $b_{\mu} p^{\mu}$ der Netzwerkfunktion f als Summen von Produkten der Impedanzen R_{τ}, pL_{τ} und der Admittanzen pC_{τ} dargestellt. Bei dieser Beschreibung stimmt dann die Multiplizität der Induktivitäten und Kapazitäten in jedem zu einem bestimmten Koeffizienten a_{μ} oder b_{μ} gehörenden Summanden mit der zugehörigen Potenz des Frequenzparameters p überein, d.h. es gilt z.B.

$$a_{\mu} p^{\mu} = p^{\mu} \sum_{\gamma} \left\{ \prod_{\tau} R_{\tau}^{(\mu, \gamma)} \prod_{\sigma=1}^q X_{\sigma}^{(\mu, \gamma)} \right\}, \quad X_{\sigma}^{(\mu, \gamma)} = L_{\sigma} C_{\sigma}. \quad (1.30a)$$

Dabei sind die im μ -ten zu $a_{\mu} p^{\mu}$ gehörenden Summanden auftretenden und voneinander verschiedenen Ohmwiderstände in dem Produkt $\prod_{\tau} R_{\tau}^{(\mu, \gamma)}$ zusammengefaßt, die q Induktivitäten und Kapazitäten dagegen in dem Produkt $\prod_{\sigma=1}^q X_{\sigma}^{(\mu, \gamma)}$. Bildet man nun die Summe der Empfindlichkeiten von f bezüglich aller Induktivitäten und Kapazitäten, so gilt

$$\sum_{\tau}^{l+c} \frac{\partial f}{\partial x_{\tau}} x_{\tau} = \frac{1}{N^2} \left(N \sum_{\tau}^{l+c} \frac{\partial Z}{\partial x_{\tau}} x_{\tau} - Z \sum_{\tau}^{l+c} \frac{\partial N}{\partial x_{\tau}} x_{\tau} \right); \quad (1.30b)$$

Weiterhin folgt mit Gl.(1.30a) und $Z(p) = \sum_{\mu=1}^n a_{\mu} p^{\mu}$

$$\sum_{\tau}^{l+c} \frac{\partial z}{\partial x_{\tau}} x_{\tau} = \sum_{g=1}^n \sum_{\tau}^{l+c} \frac{\partial (a_g p^g)}{\partial x_{\tau}} x_{\tau} = \sum_{g=1}^n p^g \sum_{\tau} \left\{ \prod_{\nu} R_{\nu}^{(\mu g)} \left(\sum_{\sigma}^{l+c} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left(\prod_{\sigma}^g x_{\sigma}^{(\mu g)} \right) x_{\tau} \right) \right\} =$$

$$= \sum_{g=1}^n p^g a_g = \frac{\partial z}{\partial p} p. \quad x_{\tau} = L_{\tau}, C_{\tau}; \quad x_{\sigma}^{(\mu g)} = L_{\sigma}, C_{\sigma}. \quad (1.30c)$$

Entsprechend gilt noch

$$\sum_{\tau}^{l+c} \frac{\partial N}{\partial x_{\tau}} x_{\tau} = \frac{\partial N}{\partial p} p, \quad (1.30d)$$

so daß man schließlich wegen Gl.(1.30b) als endgültige Beziehung erhält [4]:

$$\sum_{\mu=1}^L S_{L_{\mu}}^f + \sum_{\mu=1}^C S_{C_{\mu}}^f = \frac{\partial f}{\partial p} p. \quad (1.31)$$

Die Summenempfindlichkeit bezüglich der Induktivitäten und Kapazitäten ist also eng verknüpft mit der Frequenzableitung der betreffenden Netzwerkfunktion. Gl.(1.31) besagt, daß bei jeder Realisierung eines steilen Bandpaßfilters die Bauelementempfindlichkeiten an den Flanken des Durchlaßbereichs prinzipiell betragsgrößer sind als im flachen Durchlaßbereich selbst. Die bekannten Empfindlichkeitsprobleme bei Filtern beruhen also nicht auf konstruktivem Unvermögen, sondern liegen in der Natur des Problems. Ist f eine komplexwertige Netzwerkfunktion, dann zerfallen die Gln.(1.29,31) in jeweils zwei Gleichungen für Real- und Imaginärteil. Es ist daher möglich, auch für $|f|^2 = (\Re f)^2 + (\Im f)^2$ als Netzwerkfunktion analoge Gleichungen für die Summenempfindlichkeiten aufzustellen. Man erhält nach einigen Umformungen

$$\sum_{\mu=1}^L S_{R_{\mu}}^{|f|^2} + \sum_{\mu=1}^L S_{L_{\mu}}^{|f|^2} - \sum_{\mu=1}^C S_{C_{\mu}}^{|f|^2} = \begin{cases} +2|f|^2, & \text{falls } f \text{ Impedanzfunktion} \\ -2|f|^2, & \text{falls } f \text{ Admittanzfunktion} \\ 0, & \text{falls } f \text{ dimensionslose Übertragungsfunktion,} \end{cases} \quad (1.32)$$

sowie

$$\sum_{\mu=1}^L S_{L_{\mu}}^{|f|^2} + \sum_{\mu=1}^C S_{C_{\mu}}^{|f|^2} = \frac{\partial |f|^2}{\partial \omega} \omega. \quad (1.33)$$

Betrachtet man speziell die Impedanzfunktion f eines Reaktanzzweipols, so ergeben die Gln.(1.29,31):

$$\sum_{\mu=1}^L S_{L_{\mu}}^f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial p} p + f \right), \quad (1.34)$$

$$\sum_{\mu=1}^C S_{C_{\mu}}^f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial p} p - f \right). \quad (1.35)$$

An Nullstellen von f sind beide Ausdrücke gleich. Das heißt anschaulich, daß dort die Induktivitäten und Kapazitäten jeweils den gleichen Gesamteinfluß auf die Impedanz ausüben.

Für dimensionslose Übertragungsfunktionen von Reaktanznetzwerken folgt aus den Gln.(1.29,31):

$$\sum_{\mu=1}^k S_{L_{\mu}}^f = \sum_{\mu=1}^c S_{C_{\mu}}^f = \frac{p}{2} \frac{\partial f}{\partial p} \quad (1.36)$$

Hier sind also die Summenempfindlichkeiten bezüglich der Induktivitäten und der Kapazitäten nicht nur an den Nullstellen von f , sondern bei jeder Frequenz jeweils gleich groß. Die Beziehung Gl.(1.36) gilt für alle bezüglich f äquivalenten Reaktanzweitoren. Analoge Relationen lassen sich für Netzwerkfunktionen von RL- und RC-Netzwerken angeben.

Es liegt jetzt die Frage nahe, ob auch beim allgemeinen RLC-Netzwerk die Summenempfindlichkeit bezüglich der Ohmwidestände, der Induktivitäten und der Kapazitäten jeweils eine Konstante ist für alle äquivalenten Netzwerke bezüglich der betrachteten Netzwerkfunktion f . Aufbauend auf einer Arbeit von SCHOEFFLER [3], die später im Abschnitt über Empfindlichkeitsoptimierung noch ausführlich besprochen wird, konnten SCHMIDT, KASPER [8] folgendes beweisen:

Wenn f eine dimensionslose oder dimensionsbehaftete Übertragungs- oder Impedanzfunktion eines passiven, linearen RLC-Netzwerks ist, dann gilt:

$$\sum_{\mu=1}^r S_{R_{\mu}}^f = K_R^f(p), \quad (1.37a)$$

$$\sum_{\mu=1}^k S_{L_{\mu}}^f = K_L^f(p), \quad (1.37b)$$

$$\sum_{\mu=1}^c S_{C_{\mu}}^f = K_C^f(p). \quad (1.37c)$$

Summiert wird über alle im Netzwerk vorhandenen r Ohmwidestände, l Induktivitäten und c Kapazitäten. Die Gln.(1.37a-c) gelten aber nur für diejenigen Netzwerke, die aus einem gegebenen Netzwerk durch lineare, kontinuierliche Äquivalenztransformationen nach CAUER [3,12] entstanden sind (siehe auch Abschnitt 2.4). Die Ausdrücke für die Größen $K_R^f(p)$, $K_L^f(p)$, $K_C^f(p)$ hängen

dann von der Netzwerkfunktion, aber nicht von der einzelnen Realisierung ab. Wie schon NEWCOMB [13] darauf hinwies, können durch lineare kontinuierliche Äquivalenztransformationen nicht alle bezüglich f äquivalenten Netzwerke erfaßt werden. Wegen der Gln.(1.37a-c) lassen sich ja mit linearen kontinuierlichen Äquivalenztransformationen höchstens solche Netzwerke erzeugen, die wieder mindestens einen Ohmwidstand, eine Induktivität und eine Kapazität enthalten (falls $K_R^f(p)$, $K_L^f(p)$, $K_C^f(p)$ nicht identisch verschwinden). Die beiden äquivalenten Netzwerke (Bild 2a,b), die die Übertragungsfunktion

$$f = \frac{U_2}{U_1} = \frac{10p^2 + 1}{10p^2 + 10p + 1} \quad (1.38)$$

realisieren, fallen nicht in diese Kategorie und können daher auch nicht durch kontinuierliche Äquivalenztransformationen ineinander übergeführt werden.

Realisierung 1:

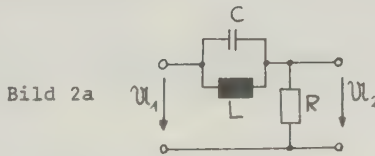


Bild 2a

$L = 10$; $C = 1$; $R = 1$.

Man erhält:

$$S_L^f = \frac{-10p}{(10p^2 + 10p + 1)^2}; \quad (1.39a)$$

$$S_C^f = \frac{100p^3}{(10p^2 + 10p + 1)^2}; \quad (1.39b)$$

$$S_R^f = \frac{10p(10p^2 + 1)}{(10p^2 + 10p + 1)^2}. \quad (1.39c)$$

Realisierung 2:

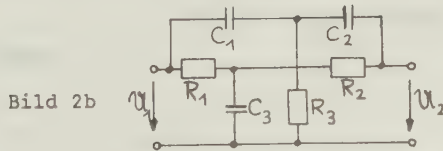


Bild 2b

$C_1 = 1$; $C_2 = 3/7$; $C_3 = 25/7$; $R_1 = 2$; $R_2 = 14/3$; $R_3 = 7/2$.

Hier gilt, was sich auch aus den Gln.(1.29,31) ergibt:

$$\sum_{\mu} S_{R_{\mu}}^f = \sum_{\mu} S_{C_{\mu}}^f = \frac{\partial f}{\partial p} P = \frac{100p^3 - 10p}{(10p^2 + 10p + 1)^2}; \quad (1.40a)$$

$$\sum_{\mu} S_{L_{\mu}}^f = 0. \quad (1.40b)$$

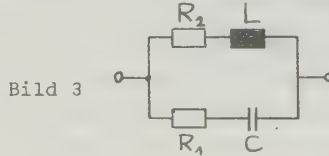
Auch wenn beide äquivalenten Netzwerke RLC-Strukturen sind, müssen die Gl.n.(1.37a-c) nicht erfüllt sein, so daß sich mit linearen kontinuierlichen Äquivalenztransformationen nur eine relativ kleine Klasse zueinander äquivalenter Netzwerke erzeugen läßt. Die beiden folgenden Beispiele veranschaulichen das.

Zunächst sei die Impedanzfunktion

$$Z = R \quad (1.41)$$

gegeben. Verglichen werden die Summenempfindlichkeiten zweier äquivalenter Realisierungen von Z (Bild 3,4).

Realisierung 1:



$$R_1 = R_2 = 1; L = 1; C = 1.$$

Es gilt

$$Z = \frac{p^2 L C R_1 + p(R_1 R_2 C + L) + R_2}{p^2 L C + p C(R_1 + R_2) + 1} = \frac{p^2 + 2p + 1}{p^2 + 2p + 1} = 1. \quad (1.42)$$

Aus Gl.(1.42) folgt:

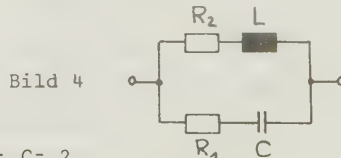
$$S_{R_1}^Z + S_{R_2}^Z = \frac{p^2}{p^2 + 2p + 1} + \frac{1}{p^2 + 2p + 1}; \quad (1.43a)$$

$$S_L^Z = \frac{p}{p^2 + 2p + 1}; \quad (1.43b)$$

$$S_C^Z = \frac{-p}{p^2 + 2p + 1}. \quad (1.43c)$$

Wie leicht nachzuprüfen ist, sind die Gl.n.(1.29,31) erfüllt.

Realisierung 2:



$$R_1 = R_2 = 1; L = 2; C = 2.$$

Hier gilt

$$Z(p) = \frac{4p^2 + 4p + 1}{4p^2 + 4p + 1} = 1. \quad (1.44)$$

Andererseits erhält man für die Empfindlichkeiten:

$$S_{R_1}^2 + S_{R_2}^2 = \frac{4p^2}{4p^2 + 4p + 1} + \frac{1}{4p^2 + 4p + 1}; \quad (1.45a)$$

$$S_L^2 = \frac{2p}{4p^2 + 4p + 1}; \quad (1.45b)$$

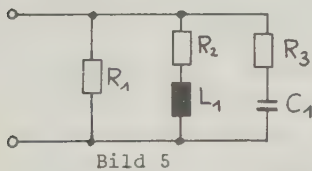
$$S_C^2 = \frac{-2p}{4p^2 + 4p + 1}. \quad (1.45c)$$

Es könnte der Eindruck entstehen, daß die verschiedenen Summenempfindlichkeiten davon herrühren, daß die Impedanz Gl.(1.41) nichtkanonisch realisiert wurde. Daß dies nicht der Fall ist, zeigt das nächste Beispiel, in dem zwei äquivalente Realisierungen der Admittanzfunktion

$$Y(p) = \frac{(p+2)(p+3)}{(p+1)(p+4)} \quad (1.46)$$

verglichen werden.

Realisierung 1:



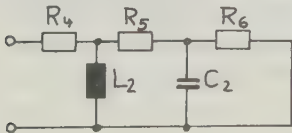
$$R_1 = 6/5; R_2 = 3/2; \\ R_3 = 6; L_1 = 3/2; C_1 = 1/24.$$

Bild 5

Für die Empfindlichkeit der Induktivität ergibt sich:

$$S_{L_1}^Y = - \frac{2(p^3 + 8p^2 + 16p)}{3(p^2 + 5p + 4)^2}. \quad (1.47)$$

Realisierung 2:



$$R_4 = 2/3; R_5 = 1/3; R_6 = 2/19; \\ L_2 = 5/18; C_2 = 15/6.$$

Bild 6

Man erhält hier

$$S_{L_2}^Y = - \frac{2(p^3 + 10p^2 + 25p)}{5(p^2 + 5p + 4)^2}. \quad (1.48)$$

Wie die Gln.(1.47,48) zeigen, stimmen die Summenempfindlichkeiten der Induktivitäten bei beiden Netzwerken nicht überein. Auch diese beiden Netzwerke lassen sich daher nicht durch kontinuierliche Äquivalenztransformationen ineinander überführen.

Die Beispiele haben gezeigt, daß der Wert der Summenempfindlich-

keiten entsprechend den Gln.(1.37a-c) im allgemeinen nicht durch die Netzwerkfunktion allein festgelegt ist, sondern maßgeblich auch von der Netzwerkrealisierung festgelegt wird. Ein ähnliches Resultat wird sich im nächsten Abschnitt für die Summe der Beträge der Empfindlichkeiten ergeben, wenn der Zusammenhang zwischen Leistung bzw. Energie im Netzwerk und den Empfindlichkeiten dargestellt ist.

1.5 Energiebeziehungen und Empfindlichkeit

Betrachtet wird der stationäre Zustand eines passiven, linearen RLC-Netzwerks, das durch eine Spannungsquelle der Stärke $\mathcal{U}_0$ harmonisch erregt wird.

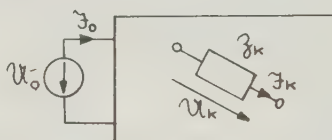


Bild 7

Dabei seien

$\mathcal{U}_k$ = Spannungsabfall über dem k. Element,

$\mathcal{I}_k$ = Strom durch das k. Element,

$Z_k = 1/Y_k$ = Impedanz des k. Elements; $k=1, \dots, n$.

Ändert man im Netzwerk von Bild 7 den Wert eines Netzwerkelements Z_μ ($\mu=1, \dots, n$) um die betragskleine Größe ΔZ_μ , dann ändern sich auch die Spannungen und Ströme im Netzwerk um $\Delta \mathcal{U}_k$ bzw. $\Delta \mathcal{I}_k$, ($k=1, \dots, n$). Zu beachten ist $\Delta \mathcal{U}_0 = 0$, da $\mathcal{U}_0$ eine eingeprägte Spannung ist. Mit den Spannungen des ursprünglichen Netzwerks (die die Maschenregel erfüllen) sowie den Strömen $\Delta \mathcal{I}_k, \Delta \mathcal{I}_0$ des modifizierten Netzwerks (die für sich die Knotenregel aufgrund ihrer Definition erfüllen), lautet das Tellegen Theorem [17] :

$$\mathcal{U}_0 \Delta \mathcal{I}_0 = \sum_{k=1}^n \mathcal{U}_k \Delta \mathcal{I}_k. \quad (1.49)$$

Dabei wird über sämtliche im Netzwerk enthaltenen Elemente summiert. Entsprechend erhält man mit den Strömen des ursprünglichen Netzwerks und den Spannungen $\Delta \mathcal{U}_k$ ($k=1, \dots, n$) des modifizierten Netzwerks:

$$\Delta \mathcal{U}_0 \mathcal{I}_0 = 0 = \sum_{k=1}^n \Delta \mathcal{U}_k \mathcal{I}_k. \quad (1.50)$$

Differenzbildung zwischen Gl.(1.50) und Gl.(1.49) ergibt

$$-U_0 \Delta \tilde{f}_0 = \sum_{k=1}^n (\Delta U_k \tilde{f}_k - U_k \Delta \tilde{f}_k). \quad (1.51)$$

Mit $\tilde{f} = U_0 / \tilde{f}_0$ folgt $\Delta \tilde{f} = -\frac{U_0}{\tilde{f}_0^2} \Delta \tilde{f}_0$ und damit

$$-U_0 \Delta \tilde{f}_0 = \tilde{f}_0^2 \Delta \tilde{f}. \quad (1.52)$$

Wegen $U_k = \tilde{f}_k \tilde{f}_k$ erhält man ferner, wenn sich ausschließlich das Element $\tilde{f}_\mu$ um $\Delta \tilde{f}_\mu$ ändert:

$$\tilde{f}_k \Delta U_k - \Delta \tilde{f}_k U_k = \tilde{f}_k \tilde{f}_k \Delta \tilde{f}_k - \Delta \tilde{f}_k \tilde{f}_k \tilde{f}_k = 0, \quad k \neq \mu, \quad (1.53)$$

$$\tilde{f}_k \Delta U_k - \Delta \tilde{f}_k U_k = \tilde{f}_k^2 \Delta \tilde{f}_k, \quad k = \mu. \quad (1.54)$$

Damit vereinfacht sich Gl.(1.51) zu

$$\tilde{f}_0^2 \Delta \tilde{f} = \tilde{f}_\mu^2 \Delta \tilde{f}_\mu. \quad (1.55)$$

Der Übergang zum Differentialquotienten liefert

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{f}_\mu} = \left(\frac{\tilde{f}_\mu}{\tilde{f}_0} \right)^2. \quad (1.56)$$

Die Gültigkeit der Gl.(1.56) wurde in dieser Form zum erstenmal von COHN [16] bewiesen. Nach leichter Umformung ergibt sich für die Empfindlichkeit der Impedanz $\tilde{z}$ gegenüber einer Änderung des Parameters $\tilde{f}_\mu$ der folgende Ausdruck:

$$S_{\tilde{z}}^{\tilde{f}_\mu} = \frac{U_\mu \tilde{f}_\mu}{\tilde{f}_0^2}; \quad \tilde{f}_\mu = R_\mu, pL_\mu, 1/pC_\mu. \quad (1.57)$$

Wie man sieht, ist die Empfindlichkeit im wesentlichen durch das Strom-Spannungsprodukt des Elements $\tilde{f}_\mu$ gegeben.

Ein Zusammenhang zwischen Netzwerkenergie und Empfindlichkeit läßt sich folgendermaßen herstellen [11]:

Die Zeitfunktionen für die Spannungen (analog für die Ströme) im Netzwerk sind von der Form

$$u(t) = U_s \cos(\omega t + \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ U e^{j\omega t} + U^* e^{-j\omega t} \}, \quad \text{mit } U = \frac{U_s}{\sqrt{2}} e^{j\beta}. \quad (1.58)$$

Mit den Bezeichnungen von Gl.(1.58) ergibt sich die mittlere in einem Ohmwidderstand R_μ "verbrauchte" Leistung zu [17]

$$T_{R_\mu} = R_\mu \tilde{f}_{R_\mu} \tilde{f}_{R_\mu}^* = U_{R_\mu} \tilde{f}_{R_\mu}^*, \quad (1.59)$$

die mittlere in einer Induktivität L_μ gespeicherte Energie zu

$$T_{L_\mu} = L_\mu \frac{\tilde{f}_{L_\mu} \tilde{f}_{L_\mu}^*}{2} = \frac{1}{2p} U_{L_\mu} \tilde{f}_{L_\mu}^* = \frac{1}{2|p|} |U_{L_\mu} \tilde{f}_{L_\mu}^*|, \quad p = j\omega, \quad (1.60)$$

sowie die mittlere in einer Kapazität C_μ gespeicherte Energie zu

$$T_{C\mu} = \frac{\tilde{z}_{C\mu} \tilde{z}_{C\mu}^*}{2 p p^* C_\mu} = \frac{1}{2 p^*} U_{C\mu} \tilde{z}_{C\mu}^* = \frac{1}{2 |p|} |U_{C\mu} \tilde{z}_{C\mu}^*|, \quad p = j\omega. \quad (1.61)$$

Aus Gl.(1.57) erhält man dann unter Verwendung der Gln.(1.59, 1.60, 61)

$$|S_{Rk}^z| = \frac{T_{Rk}}{|\tilde{z}_0|^2}, \quad (1.62a)$$

$$|S_{Lk}^z| = \frac{2 |p| T_{Lk}}{|\tilde{z}_0|^2}, \quad (1.62b)$$

$$|S_{Ck}^z| = \frac{2 |p| T_{Ck}}{|\tilde{z}_0|^2}, \quad p = j\omega. \quad (1.62c)$$

Die Beträge der Empfindlichkeiten der Impedanz eines RLC-Zweipols werden also entscheidend von der Leistung bzw. Energie bestimmt, die in den einzelnen Netzwerkelementen bei harmonischer Erregung des Netzwerks im Mittel "verbraucht" bzw. gespeichert wird. Bildet man die Summe der Beträge der Empfindlichkeiten für die einzelnen Bauelementesorten, dann ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\sum_{k=1}^r |S_{Rk}^z| = \frac{T_R}{|\tilde{z}_0|^2}, \quad (1.63a)$$

$$\sum_{k=1}^l |S_{Lk}^z| = \frac{2 |p| T_L}{|\tilde{z}_0|^2}, \quad (1.63b)$$

$$\sum_{k=1}^c |S_{Ck}^z| = \frac{2 |p| T_C}{|\tilde{z}_0|^2}, \quad p = j\omega. \quad (1.63c)$$

Dabei ist T_R die in allen Ohmwiderständen im zeitlichen Mittel "verbrauchte" Leistung und T_L bzw. T_C die im zeitlichen Mittel in den Induktivitäten bzw. Kapazitäten gespeicherte Gesamtenergie. Die Gln.(1.63a-c) stellen eine Aussage über die Summe der Beträge der jeweiligen Empfindlichkeiten dar und ermöglichen bei bekanntem T_R, T_L, T_C die Angabe einer oberen Schranke für die Beträge der jeweiligen Empfindlichkeiten.

Es interessiert nun die Frage, inwieweit die Größen T_R, T_L, T_C durch die Impedanzfunktion $\tilde{z}$ bereits bestimmt sind und damit die rechten Seiten der Gln.(1.63a-c) Invarianten bezüglich der äquivalenten Realisierungen dieser Impedanzfunktion darstellen. Dieselbe Frage ergab sich auch bei den in der Form ähnlichen Gln.(1.37a-c), die Aussagen über die Summenempfindlichkeiten bildeten. Die rechten Seiten dieser Gleichungen (K_R^f, K_L^f, K_C^f) waren für alle bezüglich einer Realisierung der Funktion f kontinuierlich

äquivalenten Netzwerke invariant. Anhand von Beispielen wurde gezeigt, daß von dieser Klasse nur eine Teilmenge aller äquivalenten Realisierungen erfaßt wird und der Wert der Größen K_R^f, K_L^f, K_C^f im allgemeinen neben der Netzwerkfunktion f auch von der Realisierung selbst abhängt.

Im Fall der Gln.(1.63a-c) läßt sich ein Zusammenhang zwischen der Impedanzfunktion Z und den Größen T_R, T_L, T_C folgendermaßen herstellen.

Zunächst kann die Impedanz eines RLC-Zweipols in der Form [47]

$$Z(p) = U_0 / I_0 = F + pT + V/p \quad (1.64)$$

dargestellt werden, wobei

$$F = \frac{1}{Z_0 Z_0^*} \sum_{\mu=1}^r R_\mu Z_{R\mu} Z_{R\mu}^*, \quad (1.65a)$$

$$T = \frac{1}{Z_0 Z_0^*} \sum_{\mu=1}^L L_\mu Z_{L\mu} Z_{L\mu}^*, \quad (1.65b)$$

$$V = \frac{1}{Z_0 Z_0^*} \sum_{\mu=1}^C \frac{1}{C_\mu} Z_{C\mu} Z_{C\mu}^*. \quad (1.65c)$$

Mit den Gln.(1.59,60,61) ergibt sich für $p=j\omega$ der Zusammenhang mit der in den Netzwerkelementen verbrauchten Leistung bzw. gespeicherten Energie zu

$$F = T_R / (Z_0 Z_0^*), \quad (1.66a)$$

$$T = 2T_L / (Z_0 Z_0^*), \quad (1.66b)$$

$$V = 2pp^* T_C / (Z_0 Z_0^*), \quad p=j\omega. \quad (1.66c)$$

Gl.(1.64) läßt sich damit für $p=j\omega$ folgendermaßen schreiben:

$$Z(j\omega) = \operatorname{Re} Z(j\omega) + j \operatorname{Im} Z(j\omega) = \frac{1}{Z_0 Z_0^*} (T_R + j 2\omega (T_L - T_C)). \quad (1.67)$$

Die rechten Seiten der Gln.(1.63a-c) sind invariant bezüglich aller äquivalenten Netzwerke der Impedanz Z , wenn dies auch für die Größen T_R, T_L, T_C zutrifft. Aus den Gln.(1.64,67) sieht man, daß für $p=j\omega$

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = T_R / |Z_0|^2 = F \quad (1.68)$$

wird. Damit ist die rechte Seite von Gl.(1.63a) für $p=j\omega$ bezüglich sämtlicher äquivalenter Realisierungen der Impedanz $Z(p)$ konstant. Wesentlich ist aber, daß durch die Netzwerkfunktion

entsprechend Gl.(1.67) zunächst nur die Differenz der Größen T_L und T_C eindeutig festgelegt ist. Das bedeutet, daß die rechten Seiten der Gln.(1.63b,c) keine Invarianten bezüglich aller äquivalenten Realisierungen einer Impedanzfunktion darstellen müssen, falls nicht noch weitere Zusammenhänge existieren, die eine eindeutige Bestimmung von T_L und T_C erlauben. Daß dies im allgemeinen nicht möglich ist, zeigen beispielsweise die zueinander äquivalenten Netzwerke von Bild 3 und Bild 4. Ähnlich wie bei den Gln.(1.37a-c) über die Summe der jeweiligen Empfindlichkeiten wird auch die Summe der Beträge der Empfindlichkeiten bezüglich der Induktivitäten bzw. Kapazitäten neben der Netzwerkfunktion maßgeblich durch die Netzwerkrealisierung bestimmt. Die Summe der Beträge der Empfindlichkeiten bezüglich der Ohmwiderstände hängt allerdings allein von der Impedanzfunktion ab.

1.6 Vorzeicheneigenschaften der Empfindlichkeiten

Die Invarianzeigenschaften der Summenempfindlichkeiten konnten für eine große Klasse von Netzwerken formuliert werden. Untersucht man die Vorzeicheneigenschaften von Empfindlichkeiten, so ist man gezwungen, sich auf spezielle Klassen von Netzwerken zu beschränken. Die Behandlung dieses Problems ist deshalb wichtig, weil es später bei der Frage nach der Existenz und den Eigenschaften empfindlichkeitsoptimaler Netzwerke eine wichtige Rolle spielen wird.

Als einfachste Klasse von Netzwerken werden ohmsche Zweipole untersucht. Zweipole aus Induktivitäten oder Kapazitäten können analog behandelt werden. Die interessierende Netzwerkfunktion sei der Gesamtwiderstand. Dann gilt

Satz 1: In jedem Zweipol, der nur aus positiven ohmschen Widerständen besteht, sind die Empfindlichkeiten des Gesamtwide-
rstands bezüglich sämtlicher Einzelwiderstände
stets größer oder gleich Null.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt am einfachsten mit Gl.(1.57). Da der Zweipol nur ohmsche Widerstände enthält, kann mit reellen Größen für Spannungen und Ströme gerechnet werden. Damit ergibt sich:

$$S_{R_k}^R = U_k I_k / I_o^2 = R_k I_k^2 / I_o^2 \geq 0.$$

w.z.b.w. (1.69)

Der Fall $S_{R_k}^R = 0$ tritt z.B. dann ein, wenn R_k im Brückenweig einer abgeglichenen Brücke liegt. Die anschauliche Bedeutung von Satz 1 ist klar: Vergrößert man in einem ohmschen Zweipol einen einzelnen Widerstand, so kann sich der Gesamtwiderstand nicht verkleinern.

Als nächstes werden Reaktanzzweipole untersucht und die Impedanz Z als interessierende Netzwerkgröße betrachtet. Hier gilt folgende Aussage:

Satz 2: Für die halbrelativen Empfindlichkeiten der Impedanz $Z(p)$ eines beliebigen Reaktanzzweipols gilt mit $p=j\omega$ und für alle $\omega \geq 0$ mit $Z(j\omega) \neq \infty$:

$$\frac{\partial Z(j\omega)}{\partial X_\mu} X_\mu = j A_\mu(\omega), \quad A_\mu(\omega) \geq 0, \quad X_\mu = L_\mu, C_\mu. \quad (1.70)$$

Der Beweis läßt sich wieder sehr einfach mit Gl.(1.57) durchführen. Wird der Reaktanzzweipol gemäß Bild 7 durch die Spannung U_0 harmonisch erregt, so gilt für jede beliebige Zweigspannung U_k bzw. jeden beliebigen Zweigstrom I_k im Netzwerk [47]:

$$U_k = H_k U_0, \quad H_k(\omega) \text{ rein reell}; \quad (1.71)$$

$$I_k = H_k U_0 / Z_k, \quad Z_k = pL_k, 1/pC_k; \quad p=j\omega. \quad (1.72)$$

Für $Z_k = pL_k$ folgt damit wegen Gl.(1.57)

$$S_{I_k}^Z = S_{U_k}^Z = U_{L_k} I_{L_k} / Z_0^2 = j \omega L_k I_{L_k}^2 / Z_0^2. \quad (1.73)$$

Wegen Gl.(1.72) und $U_0 = Z Z_0$ gilt aber $I_k = \tilde{H}_k(\omega) Z_0$ mit rein reellem $\tilde{H}_k(\omega)$. Damit ergibt Gl.(1.73)

$$S_{L_k}^Z = j \omega L_k \left| \frac{I_{L_k}}{Z_0} \right|^2 = j A_{L_k}(\omega) \quad \text{und} \quad A_{L_k}(\omega) \geq 0$$

für alle $\omega \geq 0$ mit $Z(j\omega) \neq \infty$.

Für $Z_k = 1/pC_k$ folgt:

$$S_{I_k}^Z = -S_{C_k}^Z = \frac{U_{C_k} I_{C_k}}{Z_0^2} = \frac{I_{C_k}^2}{j \omega C_k Z_0^2} = -\frac{j}{\omega C_k} \left| \frac{I_{C_k}}{Z_0} \right|^2 \quad (1.74)$$

und damit

$$S_{C_k}^Z = j \frac{1}{\omega C_k} \left| \frac{I_{C_k}}{Z_0} \right|^2 = j B_{C_k}(\omega) \quad (1.75)$$

mit $B_{C_k}(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \geq 0$ mit $Z(j\omega) \neq \infty$.

w.z.b.w.

Satz 2 besagt, daß jede Vergrößerung einer Induktivität oder Kapazität in einem Reaktanzzweipol den Imaginärteil seiner Impedanz erhöht oder unverändert läßt. Dieses später benötigte Theorem war bisher unbekannt, was vielleicht daran liegt, daß es nur für halbrelative Empfindlichkeiten gilt.

Mit den Gln.(1.73,75) folgt wegen Satz 2 für die Summenempfindlichkeiten bezüglich der Induktivitäten und Kapazitäten zunächst

$$\sum_{\mu=1}^L S_{L_{\mu}}^2 = j A(\omega), \quad A(\omega) \geq 0, \quad (1.76)$$

$$\sum_{\mu=1}^C S_{C_{\mu}}^2 = j B(\omega), \quad B(\omega) \geq 0 \quad (1.77)$$

für alle $\omega \geq 0$ mit $\Im(j\omega) \neq \infty$. Eine Verschärfung der Gln.(1.76,77) ist möglich. Mit $\Im(j\omega) = jX(\omega)$ gilt für Reaktanzzweipole [23]:

$$\omega \frac{dX}{d\omega} - X \geq 0, \quad (1.78)$$

$$\omega \frac{dX}{d\omega} + X \geq 0 \text{ für alle } \omega \geq 0 \text{ mit } \Im(j\omega) \neq \infty. \quad (1.79)$$

Für $\omega > 0, \omega \neq \infty$ tritt das Gleichheitszeichen in Gl.(1.78) (Gl.(1.79)) nur in dem Trivialfall auf, daß der Reaktanzzweipol keine Kapazitäten (Induktivitäten) enthält*). Im anderen Fall erhält man wegen der Gln.(1.34,35) für die Summenempfindlichkeiten, falls $X(\omega)$ endlich ist:

$$\sum_{\mu} S_{L_{\mu}}^2 = \frac{j}{2} \left(\frac{dX}{d\omega} + X \right) = j A(\omega), \quad A(\omega) > 0; \quad 0 < \omega < \infty; \quad (1.80)$$

$$\sum_{\mu} S_{C_{\mu}}^2 = \frac{j}{2} \left(\frac{dX}{d\omega} - X \right) = j B(\omega), \quad B(\omega) > 0; \quad 0 < \omega < \infty. \quad (1.81)$$

Die Gln.(1.80,81) besagen, daß für endliche, von Null verschiedene Frequenzen die Empfindlichkeiten bezüglich der Induktivitäten bzw. Kapazitäten nicht alle gleichzeitig Null sein können. Es läßt sich aber folgender Satz formulieren, der bei der Frage nach der Existenz empfindlichkeitsoptimaler Netzwerke noch benötigt wird.

Satz 3: Betrachtet werden die Empfindlichkeiten der Impedanz- bzw. Admittanzfunktion ($\Im$ bzw. $\mathcal{Y}$) eines beliebigen Reaktanzzweipols vom Grad $n \geq 3$ bezüglich der Induktivitäten bzw. Kapazitäten. Es existiert dann immer mindestens eine Stelle $p_0 = j\omega_0$, $0 < \omega_0 < \infty$, an der

*Darin eingeschlossen sind die Fälle, daß sämtliche Kapazitäten (Induktivitäten) in abgeglichenen Brückenzeigen liegen.

für Reaktanzzweipole mit $\mathcal{Z}(0)=0$ für mindestens eine Induktivität L , die Empfindlichkeit von $\mathcal{Z}$ bezüglich L , verschwindet (Fall a),

für Reaktanzzweipole mit $\mathcal{Y}(0)=0$ für mindestens eine Kapazität C , die Empfindlichkeit von $\mathcal{Y}$ bezüglich C , verschwindet (Fall b).

Beweis: Empfindlichkeit Null bedeutet, daß für $p=p_0$ der Wert der Impedanz $\mathcal{Z}$ wegen Gl.(1.22) unabhängig von der Größe des Parameters X_μ ist. Das ist unter anderem dann der Fall, wenn über X_μ keine Spannung abfällt und durch X_μ kein Strom fließt. Zum Beweis des Satzes genügt es, einen solchen Frequenzpunkt anzugeben. Dazu wird eine Fallunterscheidung notwendig.

a) $\mathcal{Z}(0)=0$.

Gemäß Bild 8 existiert dann im Reaktanzzweipol zwischen Knoten 1 und 2 mindestens ein Pfad P , der nur aus Induktivitäten besteht. Diese Aussage ist einleuchtend, da der Zweipol für $\omega \rightarrow 0$ zu einem reinem Induktivitätszweipol entartet. Weiterhin sind in dem Zweipol für reelles U_0 und bei beliebigem ω (siehe Gl.(1.71)) alle Teilspannungen $U_{L_\mu}(\omega)$ reell. Es wird nun behauptet, daß in dem Zweipol für $\omega \rightarrow 0$ nach Bild 8 mindestens ein Pfad P zwischen den Knoten 1 und 2 so existiert, daß alle Teilspannungen U_{L_μ} ($\mu \in P$) das gleiche Vorzeichen besitzen (falls die Bezugsrichtung der Spannungen wie in Bild 8 gewählt wurde) und von Null verschieden sind.

Zum Beweis dieser Behauptung wird zunächst der Zweipol für beliebiges $\omega \neq 0$ und bei leerlaufenden Kapazitäten betrachtet. Bei Er-

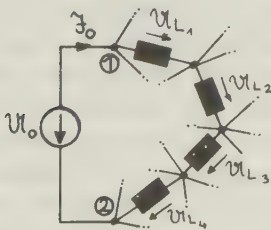


Bild 8

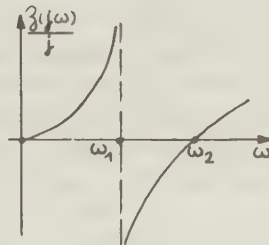


Bild 9a

regung mit $\mathcal{U}_0$ ergeben sich dann sämtliche Elementespannungen in dem nun reinen Induktivitätszweipol in der Form $\mathcal{U}_{L_\nu} = h_\nu \mathcal{U}_0$ mit frequenzunabhängigen reellen Größen h_ν . Fließt jetzt der Strom $\mathcal{I}_0$ wie in Bild 8 in den Knoten 1 hinein, so muß zur Erfüllung der Knotenregel mindestens ein mit dem Knoten 1 verbundener Induktivitätszweig existieren, durch den der Strom $\mathcal{I}_0$ (oder ein von Null verschiedener Bruchteil von $\mathcal{I}_0$ bei mehreren Zweigen) wieder aus dem Knoten 1 herausfließt. Dieser Induktivitätszweig kommt als Element für den Pfad P in Betracht. Analoge Überlegungen gelten für die übrigen Knoten, so daß zunächst die Existenz mindestens eines Pfades P mit den obigen Eigenschaften für den Zweipol bei leerlaufenden Kapazitäten feststeht. Für die Induktivitätsspannungen $\mathcal{U}_{L_\mu} = H_{L_\mu}(\omega)$, ($\mu \in P$) des Originalzweipols wird aber $H_{L_\mu}(\omega) \rightarrow h_\mu$ streben für $\omega \rightarrow 0$. Es existiert also ein $\epsilon > 0$, so daß für alle ω mit $0 < \omega < \epsilon$ auch die über den Pfadinduktivitäten abfallenden Spannungen $\mathcal{U}_{L_\mu}(\omega)$, ($\mu \in P$) im Originalzweipol von Null verschieden sind und gleiches Vorzeichen besitzen.

Betrachtet wird nun die $\omega = 0$ am nächsten liegende Nullstelle $j\omega_2$ der Impedanzfunktion des Reaktanzzweipols (Bild 9a). Für $\omega \rightarrow \omega_2$ strebt $\mathcal{I}_0 \rightarrow \infty$. Falls ein $\mathcal{I}_{L_\nu}(\omega \rightarrow \omega_2)$, ($\nu \in P$) endlich bleibt, (das ist zum Beispiel unter den Voraussetzungen $n \geq 3$ und $\mathcal{I}(0) = 0$ immer dann der Fall, wenn der Pfad P nur aus einer Induktivität besteht), so folgt wegen Gl.(1.57)

$$S_{L_\nu}^{\mathcal{I}}(j\omega_2) = 0.$$

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß alle $\mathcal{I}_{L_\nu}$, ($\nu \in P$) unendlich groß werden für $\omega \rightarrow \omega_2$. Mit der Maschenregel gilt

$$\mathcal{U}_0 = \sum_{\mu \in P} \mathcal{U}_{L_\mu}. \quad (1.82)$$

Für $\omega \rightarrow \omega_2$ strebt aber mit $\mathcal{I}_{L_\mu}$ auch $\mathcal{U}_{L_\mu} = j\omega L_\mu \mathcal{I}_{L_\mu}$ gegen Unendlich.

Gl.(1.82) kann dann nur noch gelten, wenn für ein bestimmtes ω_0 mit $0 < \omega_0 < \omega_2$ mindestens ein $\mathcal{U}_{L_\nu}(\omega_0)$, ($\nu \in P$) als reelle Größe bei reellem $\mathcal{U}_0$ sein Vorzeichen geändert hat. Wie sofort gezeigt wird, kann aber mit wachsendem ω , beginnend bei $\omega = 0$, der erste Vorzeichenwechsel von $\mathcal{U}_{L_\nu}(\omega)$ wegen Gl.(1.82) nur durch Nulldurchgang geschehen, da bei $\omega = 0$ sämtliche $\mathcal{U}_{L_\mu}$, ($\mu \in P$) von Null verschieden waren mit gleichem Vorzeichen. Bei dieser Frequenz ω_0 ist dann $S_{L_\nu}^{\mathcal{I}}(j\omega_0) = 0$.

Dabei ist zu beachten, daß in einem mit einer Spannungsquelle betriebenen Reaktanzzweipol sämtliche Induktivitätsspannungen für beliebiges ω mit $\mathcal{Z}(j\omega) \neq 0$ (und damit auch an den Polstellen von $\mathcal{Z}$) nur endliche Werte besitzen können. Denn mit Bild 9b gilt $\mathcal{U}_{L_p}/\mathcal{U}_0 = z_{21}/z_{11}$, wobei z_{21} , z_{11} Impedanzparameter des jetzt als Zweiter aufgefaßten Zweipols darstellen. Da bekanntlich [47] z_{21} für $p=j\omega$ nur dann einfache Pole besitzen kann, wenn auch $z_{11} = \mathcal{Z}(j\omega)$ und z_{22} Pole besitzen, können Pole von $\mathcal{U}_{L_p}$ nur an Nullstellen von z_{11} auftreten. Damit ist auch für $p=j\omega_1$ kein Vorzeichenwechsel einer Induktivitätsspannung über eine einfache Polstelle von $\mathcal{U}_{L_p}$ möglich.

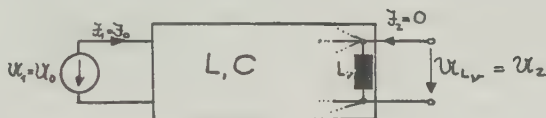


Bild 9b

Dagegen können Nullstellen von $\mathcal{U}_{L_p}$, ($p \in P$) für $p=j\omega_1$ auftreten (wie das z.B. in Bild 9c für $\mathcal{U}_{L_1}$ an der Stelle $\omega_1 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ der Fall ist), womit $\mathcal{Z}(j\omega_1)$ unabhängig vom Wert des Elements L_p ist (d.h. "Empfindlichkeit Null"). Dazu muß allerdings ergänzend bemerkt werden, daß in diesem Spezialfall einer Polstelle von $\mathcal{Z}(j\omega)$ der Wert der Größe $S_{L_p}^{\mathcal{Z}}(j\omega_1)$ endlich bleiben kann (für Bild 9c gilt zwar $\mathcal{U}_{L_1}(j\omega_1)=0$, aber $S_{L_1}^{\mathcal{Z}}(j\omega_1)=j\omega_1 L_1$). Das stellt jedoch keinen Widerspruch dar, da für die anderen Elemente mit $\mathcal{U}_{L_p}(j\omega_1) \neq 0$ wegen Gl. (1.57) sowie $\mathcal{Z}(j\omega_1)=0$ die betreffenden Empfindlichkeiten über alle Grenzen wachsen. Damit ist gezeigt, daß für jeden Reaktanzzweipol vom Grad $n \geq 3$ mit $\mathcal{Z}(0)=0$ mindestens ein ω_0 mit $0 < \omega_0 \leq \omega_2$ existiert, so daß $\mathcal{Z}(j\omega_0)$ für mindestens ein L_p Empfindlichkeit Null besitzt.

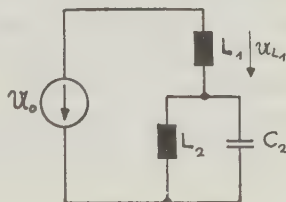


Bild 9c

b) $\mathcal{Y}(0)=0$.

Dieser Fall läßt sich analog Fall a behandeln, so daß die Aus-

fürungen kürzer gefaßt werden können. Der Zweipol werde jetzt durch eine Stromquelle $\tilde{I}_0$ mit der Frequenz ω harmonisch erregt (Bild 10). Gemäß Bild 10 läßt sich dann für jeden Zweipol mit $\mathcal{N}(0)=0$ eine Schnittmenge S bestehend aus der äußeren Zuleitung und Kapazitätszweigen so finden, daß alle Kapazitätsströme

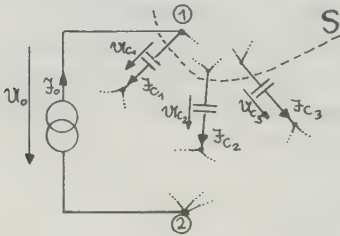


Bild 10

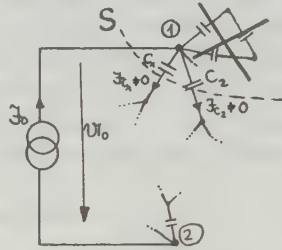


Bild 11

$\tilde{I}_{C\mu}$ ($\mu \in S$) für $\omega \rightarrow 0$ das gleiche Vorzeichen besitzen (Bezugsrichtung wie in Bild 10) und von Null verschieden sind. Ein Beispiel für eine solche Schnittmenge stellt (neben der äußeren Zuleitung) die Menge derjenigen Kapazitäten C_μ dar, die im Zweipol mit kurzgeschlossenen Induktivitäten mit dem Knoten 1 unmittelbar verbunden sind und für die dann im Fall $\omega \neq 0$ die Ströme $\tilde{I}_{C\mu}$ von Null verschieden sind. Das heißt insbesondere, daß in kreisförmigen Maschen liegende Kapazitäten (solche Maschen können beim Kurzschluß der Induktivitäten entstehen), welche mit dem Netzwerk nur über den Knoten 1 verbunden sind, nicht zu der Schnittmenge S gehören (Bild 11).

Betrachtet wird nun die Nullstelle $j\omega_2$ der Admittanz $\mathcal{N}(j\omega)$ (Bild 11a). Für $\omega \rightarrow \omega_2$ strebt $U_0 \rightarrow \infty$.

Wegen des allgemeinen Zusammenhangs $S_{x_\mu}^{\mathcal{N}} = -\frac{1}{j^2} S_{x_\mu}^{\tilde{I}}$ sowie Gl.(1.57) folgt mit $U_0 = \tilde{I} \tilde{I}_0$

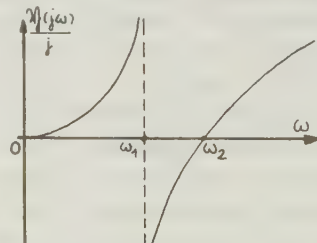


Bild 11a

$$S_{C\mu}^{\mathcal{N}} = -S_{I_{C\mu}}^{\mathcal{N}} = \frac{1}{j^2} S_{I_{C\mu}}^{\tilde{I}} = \frac{1}{j^2} \frac{U_{C\mu} \tilde{I}_{C\mu}}{\tilde{I}_0^2} = \frac{U_{C\mu} \tilde{I}_{C\mu}}{U_0^2}. \quad (1.83)$$

Falls ein $U_{C\mu}(\omega \rightarrow \omega_2)$, ($\mu \in S$) endlich bleibt, so folgt wegen Gl.(1.83) $S_{C\mu}^{\mathcal{N}}(j\omega_2) = 0$. Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß

alle $U_{C_\mu} (\mu \in S)$ unendlich groß werden für $\omega \rightarrow \omega_2$.

Nun gilt allgemein für eine Schnittmenge S nach Bild 10

$$-\tilde{F}_0 + \sum_{\mu \in S} \tilde{F}_{C_\mu}(j\omega) = 0, \quad (1.84)$$

ω beliebig.

Für $\omega \rightarrow \omega_2$ strebt mit U_{C_μ} auch $\tilde{F}_\mu = j\omega C_\mu U_{C_\mu}$ gegen Unendlich. Die Gl.(1.84) kann dann nur noch gelten, wenn für ein bestimmtes ω mit $0 < \omega_0 < \omega_2$ mindestens ein $\tilde{F}_q(\omega)$, ($q \in S$) (als reelle Größe bei reellem $\tilde{F}_0$) sein Vorzeichen gewechselt hat. Mit wachsendem ω , beginnend bei $\omega=0$, kann aber der erste Vorzeichenwechsel von $\tilde{F}_q(\omega)$ nur durch Nulldurchgang geschehen. Die Begründung verläuft vollkommen entsprechend den Überlegungen bei Fall a, wobei jetzt die Beziehung $\tilde{F}_q/\tilde{F}_0 = y_{21}/y_{11}$ mit den Admittanzparametern y_{21} , y_{11} betrachtet wird. Genau wie im Fall a können auch Nullstellen von $\tilde{F}_{C_\mu}$, ($\mu \in S$) für $\mathcal{Y}(j\omega) = \infty$ auftreten, ohne daß gleichzeitig der Wert der Größe $S_{C_\mu}^{\mathcal{Y}}$ gleich Null wäre. Das Bild 9c entsprechende Netzwerk zeigt Bild 11b. An der Stelle $\omega_1 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ gilt $S_{C_1}^{\mathcal{Y}}(j\omega_1) = j\omega_1 C_1$, obwohl $\tilde{F}_{C_1}(j\omega_1) = 0$ ist und der Wert von $\mathcal{Y}(j\omega_1)$ deshalb durch keine Änderung von C_1 beeinflußt werden kann.

Die Aussage von Satz 3 ist damit auch für Reaktanzzweipole mit Grad $n \geq 3$ und $\mathcal{Y}(0) = 0$ gezeigt.

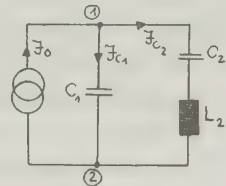


Bild 11b

w.z.b.w.

Mit Hilfe von Satz 2 ist auch eine Aussage über sekundär unbelastete Reaktanzzweitore möglich, die primär durch eine Spannungsquelle harmonisch erregt werden (Bild 12).

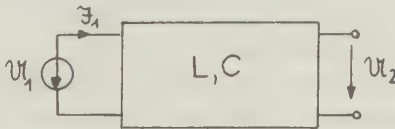


Bild 12

Satz 4: Falls für ein harmonisch erregtes und sekundär unbelastetes Reaktanzzweitor (Bild 12) die Funktion $f = U_1/U_2$ für $p = j\omega$, $0 < \omega_0 < \infty$ eine Nullstelle besitzt, so sind die Empfindlichkeiten von f bezüglich sämtlicher Induktivi-

täten und Kapazitäten reell und haben an dieser Stelle das gleiche Vorzeichen, falls sie von Null verschieden sind.

Beweis: Zunächst ist $f = \mathcal{U}_1/\mathcal{U}_2$ für $p=j\omega$ eine reelle Funktion der Kreisfrequenz ω [47], weshalb auch die Empfindlichkeiten $S_{L_p}^f$, $S_{C_p}^f$ reelle Größen sind. Da $f(\omega)$ gemäß Voraussetzung keine frequenz-unabhängige Konstante ist, so existieren wegen $f = \mathcal{U}_1/\mathcal{U}_2 = z_{11}/z_{21}$ auch die Funktionen $z_{11}(j\omega)$ und $z_{21}(j\omega)$, die entsprechende Elemente der Impedanzmatrix des betrachteten Reaktanzzweiters darstellen. Eine Nullstelle von $f(\omega)$ ist identisch mit einer Nullstelle von z_{11} , da z_{21} für $p_0=j\omega_0$ nur dann einen einfachen Pol besitzen kann, wenn dort auch z_{11} (und z_{22}) einen einfachen Pol besitzen. Da die Nullstellen von z_{11} einfach sind, muß $z_{21}(j\omega_0) \neq 0$ gelten, damit $f(\omega_0)=0$ wird.

Für die Empfindlichkeiten erhält man

$$S_{X_p}^f /_{p=j\omega_0} = \frac{1}{z_{21}} \cdot \frac{\partial z_{11}}{\partial X_p} X_p /_{p=j\omega_0} \quad \text{mit } X_p = L_p, C_p. \quad (1.85)$$

Nach Satz 2 gilt aber $\frac{\partial z_{11}}{\partial X_p} X_p = jA_p(\omega)$ mit $A_p(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \geq 0$, für die $z_{11}(j\omega)$ endlich ist, womit die Behauptung bewiesen ist.

Eine weitere Aussage läßt sich über die Vorzeichen der vollrelativen Empfindlichkeiten bei Reaktanzzweitoren aufstellen, die zwischen Ohmwidständen betrieben werden (Bild 13a). Betrachtet wird die Übertragungsfunktion $f = \mathcal{U}_2/\mathcal{U}_1$.

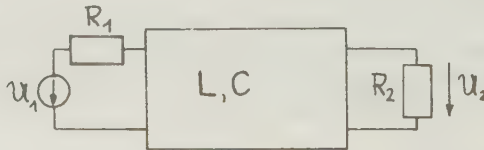


Bild 13a

Satz 5: Sei $f(p) = \mathcal{U}_2/\mathcal{U}_1$ die Übertragungsfunktion eines zwischen von Null verschiedenen Ohmwidständen betriebenen Reaktanzzweiters. Dann gilt mit $p=j\omega$ für die vollrelativen Empfindlichkeiten

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial f}{\partial X_p} \frac{X_p}{f} \right\} \leq 0 \quad \text{für alle } \omega \geq 0; \quad (1.86)$$

$$X_p = L_p, C_p.$$

Beweis: Die Übertragungsfunktion für ein Netzwerk nach Bild 13a läßt sich in Anlehnung an Gl.(1.21) in der Form

$$f = \frac{Z}{N} = \frac{Z_{0m} + Y_{1m} Z_{1m}}{N_{0m} + Y_{1m} N_{1m}}, \quad Y_{1m} = pC_{1m}, 1/pL_{1m} \quad (1.87a)$$

darstellen, wobei Z_{0m}, N_{0m} (algebraisch in Abhängigkeit von den Netzwerkelementen dargestellt) als die entsprechenden Größen Z bzw. N für $Y_{1m}=0$ aufgefaßt werden können[1]. Aus Gl.(1.87a) folgt

$$\bar{S}_{Y_{1m}}^f = \frac{N_{0m}}{N} - \frac{Z_{0m}}{Z}. \quad (1.87b)$$

Gezeigt wird zunächst

$$\Im m \left\{ \bar{S}_{Y_{1m}}^f \right\} = \Im m \left\{ \frac{N_{0m}}{N} \right\} - \Im m \left\{ \frac{Z_{0m}}{Z} \right\} \leq 0 \quad (1.87c)$$

für $Y_{1m} = pC_{1m}$.

Es gilt

$$\frac{N_{0m}}{N} = \frac{N_{0m}}{N_{0m} + pC_{1m} N_{1m}} = \frac{1}{1 + pC_{1m} N_{1m}/N_{0m}}. \quad (1.88a)$$

Falls f mit Hilfe des Knotenpotentialverfahrens ermittelt wurde, stellt N die Hauptdeterminante des entsprechenden Gleichungssystems in algebraischer Form dar. Es soll nun gezeigt werden, daß dann der Quotient N_{1m}/N_{0m} als die Impedanz $\bar{Z}_{1m}$ aufgefaßt werden kann, die man bei $U_1=0$ und für $C_{1m}=0$ zwischen den Knoten erhält, zwischen denen C_{1m} liegt.

Dazu betrachtet man zunächst die Knotenadmittanzmatrix $\underline{Y} = [Y_{ik}]$ des Netzwerks von Bild 13a und nimmt o.B.d.A. an, daß die Kapazität C_{1m} zwischen dem Knoten 1 und dem als Bezugsknoten gewählten Knoten $k+1$ liegt. In der Matrix $\underline{Y}$ erscheint dann die Kapazität C_{1m} nur als Admittanz pC_{1m} im Hauptdiagonalelement der ersten Zeile. Die Hauptdeterminante $\|\underline{Y}\|$ läßt sich nun folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \|\underline{Y}\| &= \begin{vmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{k1} & \dots & Y_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pC_{1m} + \bar{Y}_{11} & \dots & Y_{1k} \\ 0 & + \bar{Y}_{21} & \dots & Y_{2k} \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & + \bar{Y}_{k1} & \dots & \bar{Y}_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{Y}_{11} & \dots & Y_{1k} \\ \bar{Y}_{21} & \dots & Y_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{k1} & \dots & Y_{kk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pC_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{Y}_{22} & \dots & \bar{Y}_{2k} \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & Y_{k2} & \dots & Y_{kk} \end{vmatrix} = \\ &= \tilde{N}_{0m} + pC_{1m} \tilde{N}_{1m}. \end{aligned} \quad (1.88b)$$

Wie zu ersehen ist, ergibt sich $\tilde{N}_{1m}$ als Unterdeterminante^{*)} von $\underline{Y}$ nach Streichen der ersten Zeile und der ersten Spalte, während $\tilde{N}_{0m}$ die Hauptdeterminante von $\underline{Y}$ für $C_{1m}=0$ darstellt. Der Vergleich mit Gl.(1.87a) zeigt, daß offensichtlich $N_{1m} = \tilde{N}_{1m}$, $N_{0m} = \tilde{N}_{0m}$ gilt. Die oben definierte Impedanz $\bar{Z}_{1m}$ errechnet sich mit der Matrix $\underline{Y}$ im

*) algebraisch in Abhängigkeit von den Netzwerkelementen dargestellt.

Fall $C_\mu = 0, U_1 = 0$ zu

$$\bar{g}_\mu = \Delta_{11} / \Delta.$$

Dabei stellt Δ die Hauptdeterminante (algebraisch in Abhängigkeit von den Netzwerkelementen dargestellt) von $\underline{Y}$ für den Fall $C_\mu = 0$ dar und ist daher mit $N_{0\mu}$ identisch, während Δ_{11} die Unterdeterminante von $\underline{Y}$ nach Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte sein muß. Daraus folgt $\Delta_{11} = N_{1\mu}$ und somit $\bar{g}_\mu = N_{1\mu} / N_{0\mu}$. Für $\bar{g}_\mu$ als Zweipolfunktion gilt aber $\operatorname{Re} \bar{g}_\mu(j\omega) \geq 0$ für alle $j\omega$, für die $\bar{g}_\mu(j\omega)$ endlich ist [47]. Wegen Gl.(1.88a) folgt daher

$$\operatorname{Im} \{ N_{0\mu} / N \} = \operatorname{Im} \{ 1 / (1 + j\omega C_\mu \operatorname{Re} \bar{g}_\mu(j\omega) - \omega C_\mu \operatorname{Im} \bar{g}_\mu(j\omega)) \} \leq 0 \quad (1.88c)$$

für alle ω , für die $\bar{g}_\mu(j\omega)$ endlich ist und für jedes $\eta_\mu = p C_\mu$.

Der Zähler von Gl.(1.87a) in ungekürzter Form muß für ein Netzwerk nach Bild 13a stets ein gerades oder ungerades Polynom in p sein. Das sieht man ein, wenn man die Übertragungsfunktion $f = U_2 / U_1$ als Funktion der Kettenmatrixelemente des Reaktanzzweiters betrachtet und berücksichtigt, daß das Zählerpolynom $E(p)$ in ungekürzter Form ein gerades oder ungerades Polynom ist [47]. Wenn Z gerade (ungerade), dann gilt dies auch für $Z_{0\mu}$, so daß stets $\operatorname{Im} \{ \frac{Z_{0\mu}}{Z} (j\omega) \} = 0$, womit wegen $\bar{S}_{pC_\mu}^f = \bar{S}_{C_\mu}^f$ die Gültigkeit der Gl.(1.86) für beliebiges C_μ gezeigt ist.

Ein analoges Ergebnis erhält man für die Induktivitäten, da hier zwar $\bar{S}_{L_\mu}^f = -\bar{S}_{L_\mu}^f$, andererseits aber $\operatorname{Im} \{ 1 / (1 + \frac{1}{j\omega L_\mu} \operatorname{Re} \bar{g}_\mu(j\omega) + \frac{1}{\omega L_\mu} \operatorname{Im} \bar{g}_\mu(j\omega)) \} \geq 0$ gilt. In etwas anderer Form findet sich der Beweis von Satz 5 bei BLOSTEIN [6]. Satz 5 läßt sich auch anschaulich formulieren [4]. Bekanntlich ist

$$-\ln f = \tilde{\alpha}(\omega) + j\varphi(\omega), \quad (1.89)$$

wobei $\tilde{\alpha}(\omega)$ bis auf eine additive Konstante der Spannungsdämpfung und $\varphi(\omega)$ der Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangsgröße entspricht. Aus Gl.(1.89) folgt

$$df/f = -d\tilde{\alpha}(\omega) - j d\varphi(\omega). \quad (1.90)$$

Andererseits gilt in erster Näherung

$$\frac{df}{f} \approx \sum_{\mu=1}^{L+c} \frac{\partial f}{\partial X_\mu} \frac{dX_\mu}{f} = \sum_{\mu=1}^{L+c} \left(\frac{\partial f}{\partial X_\mu} \frac{X_\mu}{f} \right) \frac{dX_\mu}{X_\mu}. \quad (1.91)$$

Gleichsetzen der Imaginärteile von Gl.(1.90) und Gl.(1.91) ergibt mit Satz 4:

$$d\varphi(\omega) \approx - \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\mu=1}^{L+c} \bar{S}_{x_{\mu}}^f \frac{dx_{\mu}}{x_{\mu}} \right\} \geq 0; \quad dx_{\mu} \geq 0; \mu=1, \dots, L+c. \quad (1.92)$$

Die Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung bei einem nach Bild 13a betriebenen Reaktanzzweitor ist also eine monoton steigende Funktion jeder Induktivität und Kapazität.

Für ein RLC-Zweitor nach Bild 13b oder 13c lassen sich Aussagen über die Vorzeichen der Empfindlichkeiten der Funktion $g = -\operatorname{Re}(\ln(U_2/U_1))$ bezüglich der Abschlußwiderstände R_1 bzw. R_2 machen, wobei g bis auf eine additive Konstante die Spannungsdämpfung in dem betrachteten Netzwerk ist. Dieser Satz findet sich mit etwas anderem Beweis auch in der Arbeit [45].

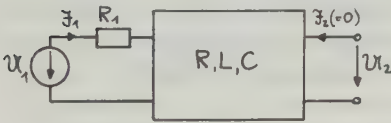


Bild 13b

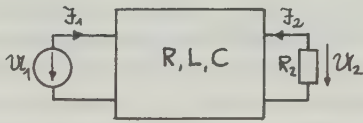


Bild 13c

Satz 6: Für beliebige RLC-Zweitore nach Bild 13b bzw. 13c gilt für die Empfindlichkeiten $S_{R_1}^g$ bzw. $S_{R_2}^g$ der Funktion $g(j\omega) = -\operatorname{Re}(\ln(U_2/U_1))$:

$$S_{R_1}^g(j\omega) \geq 0, \quad (1.93)$$

$$S_{R_2}^g(j\omega) \leq 0, \quad \omega \text{ beliebig.} \quad (1.94)$$

Beweis: Zunächst wird für Bild 13b angenommen, daß I_1 und U_2 als Funktionen von $p=j\omega$ nicht identisch verschwinden. (In diesen Fällen ist die Aussage trivial, da dann stets $S_{R_1}^g \equiv 0$ gilt). Es existieren damit die Impedanzparameter z_{11} und z_{21} des Zweitores. Dann gilt aber

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{z_{21}}{z_{11} + R_1} \quad (1.95a)$$

und hiermit

$$S_{R_1}^g = -R_1 \operatorname{Re} \frac{\partial \ln(U_2/U_1)}{\partial R_1} = \operatorname{Re} \frac{R_1}{z_{11}(j\omega) + R_1} \geq 0. \quad (1.95b)$$

Die letzte Beziehung ist gültig, da $z_{11}(j\omega) + R_1 = Z(j\omega)$ eine Zweipolfunktion darstellt, für die $\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0$ gilt für alle ω , für die $Z(j\omega)$ endlich ist.

Zum Beweis von Gl.(1.94) wird zunächst für das RLC-Zweitor Bild 13c die Existenz der Admittanzparameter gefordert. (Andernfalls gilt $S_{R_2}^g(j\omega) \equiv 0$). Man erhält dann

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-Y_{21}}{(1/R_2 + Y_{22})} \quad (1.96a)$$

und hieraus

$$S_{R_2} = - \operatorname{Re} \frac{1}{R_2 (1/R_2 + Y_{22})} \leq 0 \quad (1.96b)$$

Die letzte Beziehung folgt wieder aus der Tatsache, daß $1/R_2 + Y_{22}$ eine Zweipolfunktion mit nichtnegativem Realteil für $p=j\omega$ ist.

w.z.b.w.

Weitere Aussagen über Vorzeicheneigenschaften von Empfindlichkeiten werden ohne Bezugnahme auf eine spezielle Netzwerkkonfiguration immer schwieriger. Im Normalfall werden die Empfindlichkeiten bezüglich verschiedener Netzwerkelemente an einem interessierenden Frequenzpunkt verschiedene Vorzeichen besitzen. Das liegt daran, daß die lokale Lage des Bauelements innerhalb des Netzwerks entscheidend dessen Empfindlichkeitsfunktion beeinflußt. Zum Beispiel führt die Verkleinerung eines Längswiderstandes in einer Abzweigschaltung zu einer Verkleinerung des Betrags der Ausgangsspannung, während die Verkleinerung eines Querwiderstands den umgekehrten Effekt bewirkt. Diese Tatsache wird sich später bei der Empfindlichkeitsoptimierung als Nachteil herausstellen.

II. DAS EMPFINDLICHKEITSOPTIMALE PASSIVE RLC-NETZWERK

2.1 Statistische Betrachtungsweise des Empfindlichkeitsproblems

Im Kapitel I dieser Arbeit wurden die Einflußempfindlichkeiten einzelner Parameter bezüglich Netzwerkfunktionen in passiven, linearen RLC-Netzwerken betrachtet und ihre gemeinsamen Eigenschaften untersucht. Darauf aufbauend läßt sich das folgende Problem formulieren, das von praktischer Bedeutung ist und im Mittelpunkt der Erörterungen von Kapitel II steht:

Gegeben sei eine reelle Netzwerkfunktion f (etwa der Dämpfungsverlauf eines elektrischen Filters), gesucht ist ein elektrisches Netzwerk, das diese Funktion realisiert unter der Nebenbedingung, daß f möglichst unempfindlich gegenüber Abweichungen der einzelnen Bauelementewerte von den theoretisch errechneten Sollwerten ist. Es werden dabei nur solche Parameterschwankungen betrachtet, die von fertigungsbedingten Ungenauigkeiten herrühren; Effekte, die durch Temperaturänderung oder Alterung des Geräts hervorgerufen werden, bleiben unberücksichtigt, da in diesen Fällen die Änderungen der Bauelemente meistens nicht mehr voneinander unabhängig sind.

Einer statistischen Behandlung des Problems liegt die Idee zugrunde, daß die zu einer Realisierung eines Netzwerks verwendeten toleranzbehafteten Bauelemente X_μ als Zufallsgrößen interpretiert werden können. Als solche besitzen sie eine eigene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\varphi(X_\mu)$ mit definiertem Mittel- oder Erwartungswert

$$E_{X_\mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} X_\mu \varphi(X_\mu) dX_\mu \quad (2.1)$$

und definierter Dispersion oder Varianz

$$\sigma_{X_\mu}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (X_\mu - E_{X_\mu})^2 \varphi(X_\mu) dX_\mu \quad (2.2)$$

Gl.(2.2) ergibt die mittlere quadratische Abweichung der zufälligen Veränderlichen X_μ vom Mittelwert E_{X_μ} . Die Quadratwurzel aus der Dispersion heißt Standardabweichung oder Streuung.

Falls $\varphi(X_\mu)$ symmetrisch bezüglich des Sollwerts von X_μ ist, was im folgenden angenommen wird, fallen Sollwert und Mittelwert von X_μ zusammen. Als Toleranz α_μ eines Bauelements X_μ wird im folgen-

den der Betrag der größtmöglichen Abweichung des Elements X_μ von seinem Sollwert E_{X_μ} verstanden, angegeben in Prozent. Mit den Bezeichnungen von Bild 14 ergibt sich so

$$\alpha_\mu = \left| \frac{b - E_{X_\mu}}{E_{X_\mu}} \right| 100 = 100 \frac{b-a}{b+a}.$$

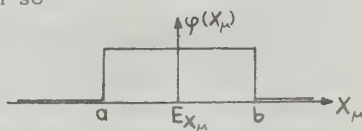


Bild 14

Für den Zusammenhang zwischen der Toleranz α_μ und der Streuung σ_{X_μ} erhält man bei Rechteckverteilung (Bild 14)

$$\sigma_{X_\mu} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = |E_{X_\mu}| \frac{2\alpha_\mu}{100\sqrt{12}} = |E_{X_\mu}| \frac{\alpha_\mu}{100\sqrt{3}} = |E_{X_\mu}| t_\mu \quad (2.3)$$

mit

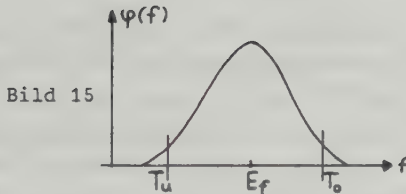
$$t_\mu = \frac{\alpha_\mu}{100\sqrt{3}}.$$

Die dabei eingeführten Größen t_μ werden im folgenden als Toleranzparameter bezeichnet.

Die Streuung ist also bei gleichem Sollwert proportional zur Toleranz von X_μ . Die zu untersuchende Netzwerkgröße $f(X_1, \dots, X_n)$ wird als Funktion der statistisch variierenden Parameter X_μ selbst zur Zufallsgröße und besitzt ebenfalls eine eigene Wahrscheinlichkeitsverteilung [18, 58] mit zugehörigem Mittelwert E_f und Streuung σ_f^2 . Wesentlich ist dabei, daß alle Bauelemente gleichzeitig und voneinander unabhängig variieren.

Nach diesen Ausführungen ist es naheliegend, f als unempfindlich gegenüber Parameterschwankungen zu bezeichnen, wenn die mittlere quadratische Abweichung σ_f^2 von $f(X_1, \dots, X_n)$ vom Mittelwert E_f klein ist. Die Dispersion σ_f^2 ist also ein Maß für die Gesamtempfindlichkeit einer Netzwerkfunktion. Es wird dadurch der Effekt der gleichzeitigen Änderung aller Parameter beschrieben, während im Kapitel I der Einfluß jeweils nur einer Variablen auf die Netzwerkfunktion untersucht wurde.

Die Dispersion σ_f^2 ist nicht das einzige Maß zur Beurteilung der Gesamtempfindlichkeit. Eine weitere Möglichkeit wäre, zwei Schranken T_o und T_u zu betrachten, zwischen denen z.B. mit 90% Wahrscheinlichkeit der Wert von f bei gegebenen Toleranzen der Bauelemente liegt [18] (Bild 15). Leider scheitert eine exakte Berechnung von σ_f^2 oder T_o und T_u in allen Fällen von praktischer Bedeutung an der Kompliziertheit der auftretenden Beziehungen. Eine



wenigstens annähernde Berechnung von σ_f^2 ist mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchführbar [19,20] und zwar gilt:

$$\sigma_f^2 \approx \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_{\mu}} \right)^2 \sigma_{X_{\mu}}^2. \quad (2.4)$$

Diese Formel geht aus der Taylorentwicklung der reellen Funktion f um die Sollwerte der einzelnen Parameter X_{μ} hervor, die nach den linearen Gliedern abgebrochen wird. Beim Vorhandensein genügend vieler Variabler ($n > 4$) wird dann f als normalverteilt angenommen, womit die Verteilung bei bekanntem Mittelwert bereits vollständig bestimmt ist. Letzterer ist in erster Näherung gleich dem Sollwert von f . Bezeichnet man die Erwartungswerte $E_{X_{\mu}}$ der Variablen X_{μ} Einfachheit halber mit X_{μ} , so ergibt sich aus Gl.(2.4) mit Gl.(2.3)

$$\sigma_f^2 \approx \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_{\mu}} \right)^2 X_{\mu}^2 t_{\mu}^2 = \sum_{\mu=1}^n (S_{X_{\mu}}^f)^2 t_{\mu}^2. \quad (2.5)$$

Gl.(2.5) als Kriterium für die Gesamtempfindlichkeit einer reellen Netzwerkfunktion f bezüglich sämtlicher Bauelemente X_{μ} besticht durch seine Einfachheit und leichte Anwendbarkeit. Das einzig störende an Gl.(2.5) sind die zu den Toleranzen proportionalen Größen t_{μ} , da diese im Entwurfsstadium eines Netzwerks noch nicht bekannt sind. Diese Schwierigkeit umgeht das von SCHOEFFLER [3] vorgeschlagene Maß Φ^f für die Gesamtempfindlichkeit, wobei Φ^f sowohl für reelle, als auch komplexe Netzwerkfunktionen berechnet werden kann:

$$\Phi^f = \sum_{\mu=1}^n |S_{X_{\mu}}^f|^2. \quad *) \quad (2.6)$$

Es ist noch zu bemerken, daß Gl.(2.6) nicht aufgrund von Gl.(2.5) eingeführt wurde, sondern aus dem Betragsquadrat des Empfindlichkeitsvektors

$$\mathbf{T} = \{S_{X_1}^f, \dots, S_{X_n}^f\} \quad (2.7)$$

hervorging. Φ^f ist also für reelle Netzwerkfunktionen proportio-

*) Falls auf der rechten Seite von Gl.(2.6) vollrelative Empfindlichkeiten verwendet werden, wird die zugehörige Gesamtempfindlichkeit im folgenden durch einen zusätzlichen Querstrich (Φ^f) gekennzeichnet.

nal dem mit Gl.(2.5) erhaltenen Wert für die Disperison von f , wenn alle Bauelemente dieselbe Verteilung und die gleiche Toleranz besitzen.

Es ist fraglich, ob für eine komplexe Netzwerkfunktion f die Berechnung von Φ^f zu Vergleichszwecken sinnvoll ist. Physikalisch meßbar und deshalb für eine Empfindlichkeitsuntersuchung in erster Linie in Frage kommend, sind nur reelle Größen wie Dämpfung, Phasengang usw. Daß für eine komplexe Netzwerkfunktion die Größen Φ^f und Φ^{f*} nicht zueinander proportional sind, zeigt der folgende Zusammenhang.

Mit $f = \operatorname{Re}(f) + j \operatorname{Im}(f)$ gilt:

$$S_{x_p}^f = \frac{\partial(\operatorname{Re}(f))}{\partial x_p} x_p + j \frac{\partial(\operatorname{Im}(f))}{\partial x_p} x_p = \operatorname{Re}(S_{x_p}^f) + j \operatorname{Im}(S_{x_p}^f). \quad (2.8)$$

Damit wird

$$\Phi^f = \sum_{p=1}^n |S_{x_p}^f|^2 = \sum_{p=1}^n \left((\operatorname{Re}(S_{x_p}^f))^2 + (\operatorname{Im}(S_{x_p}^f))^2 \right). \quad (2.9)$$

Betrachtet man andererseits

$$ff^* = (\operatorname{Re}(f))^2 + (\operatorname{Im}(f))^2, \quad (2.10)$$

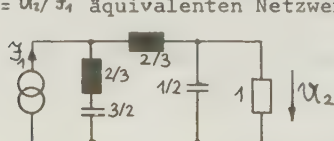
so folgt

$$S_{x_p}^{ff^*} = 2 \operatorname{Re}(f) \operatorname{Re}(S_{x_p}^f) + 2 \operatorname{Im}(f) \operatorname{Im}(S_{x_p}^f) = 2 \operatorname{Re}(f^* S_{x_p}^f). \quad (2.11)$$

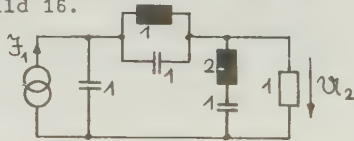
somit wird

$$\Phi^{ff^*} = 4 \sum_{p=1}^n (\operatorname{Re}(f^* S_{x_p}^f))^2. \quad (2.12)$$

Ein Beispiel möge den Unterschied zwischen der Gl.(2.9) und Gl.(2.12) verdeutlichen. Betrachtet werden die beiden bezüglich $f = U_2/I_1$ äquivalenten Netzwerke von Bild 16.



Netzwerk 1



Netzwerk 2

Bild 16

Es gilt dann

$$f = \frac{U_2}{I_1} = \frac{p^2 + 1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}. \quad (2.13)$$

An der Stelle $p = j0.4$ erhält man:

Netzwerk 1: $\Phi^f(0.4) = 0.709$;

$\Phi^{f^*}(0.4) = 0.745$;

Netzwerk 2: $\Phi^f(0.4) = 0.684$;

$\Phi^{f^*}(0.4) = 0.923$.

Während mit Φ^f als Vergleichsmaßstab Netzwerk 2 besser abschneidet, kehrt sich bei Verwendung von Φ^{ff*} das Verhältnis um. Die komplexe Netzwerkfunktion f ist also im allgemeinen nicht zur Beurteilung des Empfindlichkeitsverhaltens von $|f|^2$ geeignet. Dieser Umstand wurde in der Literatur bisher nicht berücksichtigt.

2.2 Definition des empfindlichkeitsoptimalen Netzwerks

In den Gln.(2.5,6) des letzten Abschnitts wurden zwei Kriterien zur Beurteilung der Gesamtempfindlichkeit eines Netzwerks vorgestellt. Welches davon verwendet wird, hängt im wesentlichen von der Art des gerade untersuchten Empfindlichkeitsproblems ab. Bei der Behandlung grundlegender Probleme ist Gl.(2.6) vorzuziehen, da hier die Werte der einzelnen Toleranzparameter keine Rolle spielen. Bei einer praktischen Realisierung dagegen können diese nicht beliebig gewählt werden, sondern unterliegen den einschränkenden Nebenbedingungen einer Kostenfunktion (siehe Abschnitt 2.6), weshalb dann die Verwendung von σ_f^2 als Empfindlichkeitsmaßstab angebracht ist.

Die Empfindlichkeiten $S_{x_p}^f$ und damit auch Φ^f bzw. σ_f^2 sind im allgemeinen frequenzabhängig. Bei vielen Netzwerken, z.B. Filtern, interessiert nun das Empfindlichkeitsverhalten nicht nur an einem Frequenzpunkt, sondern in einem ganzen Frequenzintervall. Es wird deshalb nach Netzwerken gesucht, die im gesamten interessierenden Frequenzbereich ein besseres Empfindlichkeitsverhalten und damit ein kleineres Φ^f besitzen als vergleichbare äquivalente Realisierungen.

Die Frage nach dem theoretisch möglichen Minimum von Φ^f bei gegebener Netzwerkfunktion f wurde zum erstenmal von SCHMIDT und KASPER[8] aufgeworfen. Die wesentliche Rolle spielen dabei die Summengleichungen für die Empfindlichkeiten

$$\sum_{p=1}^r S_{R_p}^f = K_R^f(p), \quad (1.37a)$$

$$\sum_{p=1}^l S_{L_p}^f = K_L^f(p), \quad (1.37b)$$

$$\sum_{p=1}^c S_{C_p}^f = K_C^f(p). \quad (1.37c)$$

Die Werte der Größen K_R^f, K_L^f, K_C^f hängen im allgemeinen außer von der

Netzwerkfunktion f noch von der jeweiligen Realisierung ab. Jedoch bleiben für alle aus einem gegebenen Netzwerk durch kontinuierliche Äquivalenztransformationen erzeugten Netzwerke K_R^f, K_L^f, K_C^f invariant. Mit den Gln. (1.37a-c) läßt sich zeigen, daß dann bei gegebenem r, l, c bei einer bestimmten Frequenz Φ^f minimal wird, wenn sämtliche Empfindlichkeiten der einzelnen Bauelementesorten untereinander jeweils numerisch gleich sind^{*)}, insbesondere bei komplexen Empfindlichkeiten die Real- und Imaginärteile unter sich übereinstimmen, d.h.

$$S_{R\mu}^f(p) = K_R^f(p)/r, \quad \mu = 1, \dots, r, \quad (2.14a)$$

$$S_{L\mu}^f(p) = K_L^f(p)/l, \quad \mu = 1, \dots, l, \quad (2.14b)$$

$$S_{C\mu}^f(p) = K_C^f(p)/c, \quad \mu = 1, \dots, c. \quad (2.14c)$$

Für die theoretisch minimale Gesamtempfindlichkeit erhält man somit

$$\Phi_{\min}^f = \frac{|K_R^f|^2}{r} + \frac{|K_L^f|^2}{l} + \frac{|K_C^f|^2}{c}. \quad (2.15)$$

Wie man sieht, sinkt im betrachteten Fall konstanter Werte für K_R^f, K_L^f, K_C^f der theoretisch erreichbare Wert für Φ^f mit wachsender Zahl der Bauelemente. Mit zunehmendem r, l, c nimmt dann auch die optimale Empfindlichkeit des einzelnen Bauelements ab. Qualitativ ist dieses Verhalten vom statistischen Standpunkt aus verständlich. Je mehr Parameter eine Funktion bestimmen, desto eher gleichen sich im allgemeinen deren statistische Schwankungen im

*) Anschaulich handelt es sich bei reellen Empfindlichkeiten um das Problem, den Radius der n -dimensionalen Kugel $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2$ so klein zu wählen, daß die Ebene $x_1 + x_2 + \dots + x_n = K$ gerade noch berührt. Der Berührungspunkt besitzt dann die Koordinaten $x_1 = x_2 = \dots = x_n = K/n$, womit man $r^2 = K^2/n$ erhält. Dabei entsprechen die x_μ den Einzelempfindlichkeiten und r^2 dem von einer Bauelementesorte herrührenden Anteil an der Gesamtempfindlichkeit Φ^f .

Bei komplexen Empfindlichkeiten zerfallen die Summengleichungen Gln. (1.37a-c) in jeweils zwei Gleichungen für Real- und Imaginärteile:

$$\sum_{\mu} \operatorname{Re}(S_{X\mu}^f) = \operatorname{Re}(K_X^f), \quad \sum_{\mu} \operatorname{Im}(S_{X\mu}^f) = \operatorname{Im} K_X^f; \quad X=R, L, C.$$

Entsprechend setzt sich die Gesamtempfindlichkeit Φ^f aus zwei additiven Anteilen zusammen.

$$\Phi^f = \sum_{\mu=1}^n (\operatorname{Re}(S_{X\mu}^f))^2 + \sum_{\mu=1}^n (\operatorname{Im}(S_{X\mu}^f))^2.$$

Wegen der getrennten Summengleichungen für die Real- und Imaginärteile der Empfindlichkeiten läßt sich Φ^f dann minimieren, indem jeder Anteil für sich zum Minimum gemacht wird.

Mittel aus; außerdem wird die Streuung der Funktion am geringsten sein, wenn sämtliche Parameter den gleichen Einfluß ausüben. Wie noch gezeigt wird, bedeutet dies aber nicht, daß gegenüber einer kanonischen Realisierung jede redundante ein besseres Empfindlichkeitsverhalten besitzt. Zu beachten ist noch, daß $\Phi_{\min}^f$ aus Gl.(2.15) nur die minimale Gesamtempfindlichkeit für diejenigen Realisierungen von f mit jeweils gleichem r, l, c darstellt, die auch die gleichen Werte für K_R^f, K_L^f, K_C^f besitzen. Für Realisierungen von f mit anderen Werten für K_R^f, K_L^f, K_C^f ergeben sich entsprechend auch andere Werte für $\Phi_{\min}^f$.

Unter all den möglichen äquivalenten Realisierungen einer Netzwerkfunktion mit vergleichbarem Aufwand interessieren speziell diejenigen, die minimales Φ^f in einem ganzen Frequenzbereich besitzen. Solche Netzwerke sollen im folgenden empfindlichkeitsoptimal genannt werden. Empfindlichkeitsoptimal bedeutet damit wegen der Gln.(2.14a-c), daß sämtliche Empfindlichkeiten der einzelnen Elementesorten in jedem Frequenzpunkt untereinander jeweils numerisch gleich groß sind. Die für praktische Anwendungen wichtige Frage nach der Existenz und den Eigenschaften empfindlichkeitsoptimaler Netzwerke wurde 1967 von LEEDS, UGRON [7] aufgeworfen und einzelne Teilaspekte von HOLT, FIDLER [21,22] diskutiert. Eine systematische Untersuchung fehlte jedoch bisher und soll deshalb im folgenden durchgeführt werden.

2.3 Existenz und Eigenschaften empfindlichkeitsoptimaler

RLC-Netzwerke

2.3.1 Zweipole aus einer Bauelementesorte

Die Betrachtung dieser sehr einfachen Klasse von Netzwerken ist deshalb lohnend, weil die Problematik des empfindlichkeitsoptimalen Netzwerks hier noch anschaulich diskutiert werden kann. Die folgenden Darlegungen beschränken sich auf rein ohmsche Zweipole. Für Zweipole aus Induktivitäten oder Kapazitäten gelten analoge Aussagen. Die interessierende Netzwerkfunktion sei der Gesamtwiderstand R in Abhängigkeit von den Einzelwiderständen R_μ . Es gilt dann der folgende Satz:

Satz 7: Zu einer beliebig gegebenen topologischen Struktur eines ohmschen Zweipols, der allein durch Serien- und Parallelschaltung aufgebaut werden kann, gibt es einen einzigen, eindeutig bestimmten Satz von Widerstandswerten, so daß die Empfindlichkeiten des fest vorgegebenen Gesamtwiderstands R bezüglich der Einzelwiderstände R_μ alle gleich groß sind und damit Φ^R minimal wird.

Beweis: Der Beweis erfolgt über die Angabe eines Algorithmus, durch den die Werte der Einzelwiderstände bei gegebenem Gesamtwiderstand R und gegebener Topologie eindeutig ermittelt werden. Wenn das Netzwerk n Widerstände enthält, so gilt wegen Gl.(1.29)

$$\sum_{\mu=1}^n S_{R_\mu}^R = R. \quad (2.16)$$

Mit Satz 1 und da der Zweipol empfindlichkeitsoptimal sein soll, muß gelten

$$S_{R_\mu}^R = R/n; \quad \mu=1, \dots, n. \quad (2.17)$$

Betrachtet man die allgemeine Struktur eines reinen Serien-Parallel-Zweipols, so wird dieser aus einer Reihenschaltung endlich vieler Teilzweipole Z_ν bestehen (Bild 17).

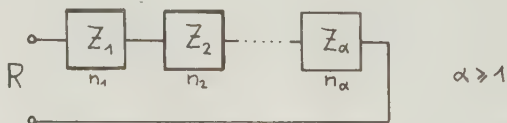


Bild 17

Die einzelnen Teilzweipole Z_ν mögen jeweils n_ν Widerstände $R_\tau^{(\nu)}$ ($\tau=1, \dots, n_\nu$) enthalten und nicht in eine weitere Reihenschaltung zerlegbar sein. Dann gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha} Z_\nu = R, \quad (2.18a)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha} n_\nu = n. \quad (2.18b)$$

Wegen Gl.(2.18a) folgt nun die wichtige Beziehung

$$S_{R_\tau}^R = \frac{\partial R}{\partial Z_\nu} \frac{\partial Z_\nu}{\partial R_\tau^{(\nu)}} R_\tau^{(\nu)} = \frac{\partial Z}{\partial R_\tau^{(\nu)}} R_\tau^{(\nu)} = S_{R_\tau^{(\nu)}}^{Z_\nu}; \quad \begin{matrix} \tau=1, \dots, n_\nu; \\ \nu=1, \dots, \alpha. \end{matrix} \quad (2.19a)$$

Gl.(2.19a) besagt, daß die Empfindlichkeiten des Gesamtwiderstands R bezüglich der Widerstände $R_\tau^{(\nu)}$ eines jeden Teilzweipols Z_ν von

allen übrigen Teilzweipolen Z_{μ} , $\mu \neq \nu$ unabhängig sind. Der Gesamtwiderstand wird also empfindlichkeitsoptimal realisiert sein, wenn jeder Teilzweipol Z_{ν} für sich empfindlichkeitsoptimal ist. Mit den Gln.(2.17,19a) erhält man weiter im empfindlichkeitsoptimalen Fall

$$S_{R_{\tau}^{(\nu)}}^{Z_{\nu}} = R/n \quad (2.19b)$$

und hieraus bei Beachtung von Gl.(1.29) für die Summenempfindlichkeiten

$$\sum_{\tau=1}^{n_{\nu}} S_{R_{\tau}^{(\nu)}}^{Z_{\nu}} = n_{\nu} \cdot (R/n) = Z_{\nu}, \quad \nu = 1, \dots, \alpha. \quad (2.20)$$

Der Gesamtwiderstand des Teilzweipols Z_{ν} ist also im empfindlichkeitsoptimalen Fall bis auf einen Faktor R allein durch die Topologie bestimmt und gleich $n_{\nu}(R/n)$. Topologisch besteht Z_{ν} aus einer Parallelschaltung von weiteren Zweipolen mit den Impedanzen $Z_{\nu k}$, $k=1, \dots, \beta$; $\beta \geq 1$, von denen jeder $n_{\nu k}$ Bauelemente enthält und sich in keine weitere Parallelschaltung zerlegen läßt (Bild 18).

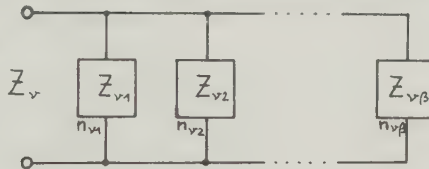


Bild 18

Für die weitere Betrachtung des Teilzweipols Z_{ν} ist es sinnvoll, mit Leitwerten anstelle von Widerständen zu arbeiten. Ist ein Leitwert $g=1/r$ Element eines Zweipols mit der Admittanz $y=1/z$, so gilt allgemein

$$S_{\tau}^y = \frac{1}{z} S_{\tau}^z. \quad (2.21)$$

Wendet man diese Beziehung auf Gl.(2.19b) an und beachtet $Z_{\nu} = n_{\nu} \frac{R}{n}$ dann ergibt sich mit $Y_{\nu} = 1/Z_{\nu}$ und $G_{\tau}^{(\nu)} = 1/R_{\tau}^{(\nu)}$

$$S_{G_{\tau}^{(\nu)}}^{Y_{\nu}} = \frac{1}{n_{\nu}^2 \left(\frac{R}{n}\right)^2} \frac{R}{n} = \frac{n}{n_{\nu}^2 R}, \quad \begin{matrix} \tau = 1, \dots, n_{\nu}; \\ \nu = 1, \dots, \alpha. \end{matrix} \quad (2.22)$$

Wegen

$$Y_{\nu} = \sum_{k=1}^{\beta} Y_{\nu k} \quad (2.23a)$$

gilt nun für ein im Teilleitwert $Y_{\nu k}$ enthaltenes Element $G_{\tau}^{(\nu k)}$

$$S_{G_{\tau}^{(\nu k)}}^{Y_{\nu}} = \frac{\partial Y_{\nu}}{\partial Y_{\nu k}} \frac{\partial Y_{\nu k}}{\partial G_{\tau}^{(\nu k)}} G_{\tau}^{(\nu k)} = S_{G_{\tau}^{(\nu k)}}^{Y_{\nu k}}, \quad \begin{matrix} \tau = 1, \dots, n_{\nu k}; \\ \nu = 1, \dots, \beta, \end{matrix} \quad (2.23b)$$

und mit Gl.(2.22) weiter im empfindlichkeitsoptimalen Fall

$$S_{g\tau}^{Y_{v\kappa}} = \frac{n}{n_v^2 R} \quad (2.23c)$$

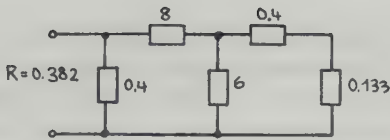
Gl.(2.23b) besagt, daß der Zweipol Y_v bereits empfindlichkeitsoptimal realisiert ist, wenn jeder Teilleitwert $Y_{v\kappa}$ für sich empfindlichkeitsoptimal ist. Summation über die Empfindlichkeiten der $n_{v\kappa}$ Elemente des Teilleitwerts $Y_{v\kappa}$ ergibt mit Gl.(2.23c) sowie Gl.(1.29), wobei noch die Gültigkeit der allgemeinen Beziehung $S_{\tau}^f = -S_{\tau}^g$ zu beachten ist

$$\sum_{\tau=1}^{n_{v\kappa}} S_{g\tau}^{Y_{v\kappa}} = n_{v\kappa} \frac{n}{n_v^2 R} = Y_{v\kappa} \quad (2.23d)$$

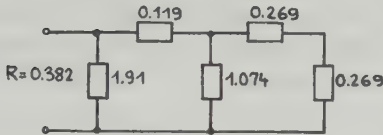
Falls z.B. $n_{v\kappa}=1$, $Y_{v\kappa}$ also aus einem einzigen Element besteht, muß der Widerstand dieses Elements gleich $(n_v^2/n)R$ sein. Ist $n_{v\kappa}>1$, besteht der Zweipol $Y_{v\kappa}$ aus einer Reihenschaltung von mindestens zwei weiteren Widerständen. Um deren Werte für einen empfindlichkeitsoptimalen Gesamtwiderstand zu ermitteln, verfährt man analog wie im ersten Teil des Beweises geschildert. Der Algorithmus bricht nach endlich vielen Schritten dann ab, wenn jeder Teilzweipol aus nur noch einem Element besteht, dessen Wert sich eindeutig im Verlauf des beschriebenen Verfahrens ergibt. Wie man sieht, ist die Zerlegung des Zweipols eindeutig mit der topologischen Struktur des Netzwerks verknüpft; es existiert also genau ein Wertesatz der Bauelemente für empfindlichkeitsoptimalen Gesamtwiderstand.

W.z.b.w.

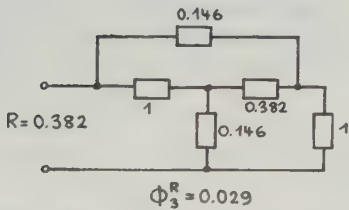
Entscheidend für Satz 7 waren erstens die eindeutige Zerlegungsmöglichkeit des Netzwerks und zweitens, daß sich die einzelnen Teilzweipole gegenseitig im Empfindlichkeitsverhalten nicht beeinflussen. Diese beiden Eigenschaften entfallen, wenn man ohmsche Zweipole mit Brückenweigen betrachtet. Es wird daher kaum möglich sein, auch in diesem Fall einen Algorithmus zu finden, der in so einfacher Weise wie im Beweis von Satz 7 geschildert, einen optimalen Wertesatz für die Widerstände liefert. Man wird hier eher versuchen müssen, von einer gegebenen Realisierung ausgehend durch schrittweise Änderung der Bauelementewerte den Zweipol iterativ empfindlichkeitsoptimal zu machen. Bild 19 zeigt vier Realisierungen eines Ohmwiderstands $R=0.382$, von denen drei empfindlichkeitsoptimal sind. Die letzten beiden stellen optima-



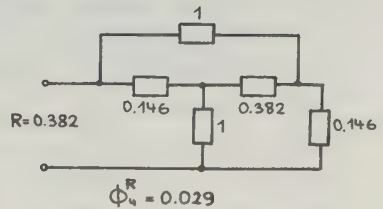
$$\Phi_1^R = \sum_{\mu=1}^5 (S_{R\mu}^R)^2 = 0.133$$



$$\Phi_2^R = 5 \cdot 0.0058 = 0.029$$



$$\Phi_3^R = 0.029$$



$$\Phi_4^R = 0.029$$

Bild 19

le Brückennetzwerke dar und zeigen, daß für eine Brückenstruktur mehrere Bauelementesätze für empfindlichkeitsoptimalen Gesamtwiderstand existieren können.

Nach Gl.(1.57) bedeutet der empfindlichkeitsoptimale Zustand, daß in jedem Einzelwiderstand die gleiche Leistung "verbraucht" wird, während in Zweipolen aus Induktivitäten oder Kapazitäten jede Reaktanz die gleiche Energie speichert. Dabei ist zu beachten, daß mit Gl.(1.57) die Aussage zunächst im zeitlichen Mittel gilt. Da aber beim reinen Induktivitäts- bzw. Kapazitätszweipol sämtliche Zweigspannungen stets die gleiche Phase besitzen, ist die Behauptung in jedem Zeitpunkt erfüllt.

2.3.2 Empfindlichkeitsoptimale Reaktanzzweipole

Betrachtet wird die Impedanz Z eines Reaktanzzweipols als interessierende Netzwerkgröße. Der wesentliche Unterschied gegenüber den eben behandelten rein ohmschen Zweipolen ist die Frequenzabhängigkeit von $Z(j\omega)$. Dieser Umstand entscheidet über die Existenz empfindlichkeitsoptimaler Reaktanzzweipole. Nach Satz 2 sind sämtliche halbrelativen Empfindlichkeiten bezüglich der Induktivitäten und Kapazitäten rein imaginär mit positivem Imaginärteil.

Ein Reaktanzzweipol ist empfindlichkeitsoptimal, wenn in einem ganzen Frequenzbereich die Empfindlichkeiten der Induktivitäten und Kapazitäten jeweils gleich groß sind. Nach den Gln. (1.62b,c) würde dies aber bedeuten, daß für beliebiges ω in jeder Induktivität und in jeder Kapazität im zeitlichen Mittel jeweils die gleiche Energie gespeichert wird. Diese sehr starke Forderung schränkt die Klasse empfindlichkeitsoptimaler Reaktanzzweipole stark ein, wie der folgende Satz zeigt.

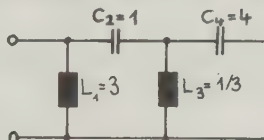
Satz 8: Es existiert keine empfindlichkeitsoptimale Realisierung einer Reaktanzzweipolfunktion vom Grad $n \geq 3$, so daß die halbrelativen Empfindlichkeiten von $Z(j\omega)$ bezüglich der Induktivitäten und Kapazitäten für $p=j\omega$ in einem endlichen Frequenzintervall $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ jeweils alle gleich groß sind.

Beweis: Nach den vorbereitenden Aussagen von Satz 3 verläuft der Beweis sehr einfach. $Z(j\omega)$ kann als Quotient zweier Polynome in p dargestellt werden; das gleiche gilt für die Empfindlichkeiten von Z bezüglich der Induktivitäten L_μ und der Kapazitäten C_μ . Stimmen letztere deshalb in einem endlichen Frequenzbereich jeweils überein, so muß diese Gleichheit für beliebiges p gelten. Zum Beweis von Satz 8 genügt es also, einen einzigen Frequenzpunkt ω_0 mit $\omega_0 \neq 0$ zu finden, an dem diese Gleichheit nicht gelten kann. Nach Satz 3 existiert aber für jeden Reaktanzzweipol vom Grad $n \geq 3$ mindestens ein von Null verschiedener Frequenzpunkt ω_0 , an dem die Empfindlichkeit bezüglich mindestens einer Kapazität oder Induktivität verschwindet. Wegen der Gln. (1.80,81) können aber für endliche, von Null verschiedene Frequenzen nicht sämtliche Empfindlichkeiten der Induktivitäten oder Kapazitäten gleichzeitig verschwinden. w.z.b.w.

Für kanonische Reaktanzzweipole zweiten Grades hat der Begriff empfindlichkeitsoptimal keinen Sinn, da sie nur aus einer Induktivität und Kapazität bestehen; nicht kanonische Realisierungen lassen sich dagegen wie im Abschnitt 2.3.1 behandeln, falls die Netzwerke keine Brücken Zweige enthalten. (Man muß dazu nur die für $p=0$ bzw. $p=\infty$ entstehenden reinen Induktivitäts- bzw. Kapazitätzweipole (oder umgekehrt) untersuchen).

Satz 8 läßt sich auch folgendermaßen anschaulich begründen: Wie bereits erwähnt, bedeutet empfindlichkeitsoptimal im Fall eines Reaktanzzweipols, daß jede Induktivität und jede Kapazität im zeitlichen Mittel jeweils die gleiche Energie speichert. Man könnte diesen Zustand als Empfindlichkeitsgleichgewicht bezeichnen. Wie im Abschnitt 2.3.1 geschildert, müssen dann die Bauelementewerte genau definierte Werte besitzen. Da sich aber im Reaktanzzweipol bei jeder Frequenzänderung auch die Werte der Reaktanzen ωL und $-1/\omega C$ ändern, ist verständlich, daß dadurch ein vorhandener Gleichgewichtszustand verloren geht. Ein Reaktanzzweipol kann damit höchstens an endlich vielen Frequenzpunkten empfindlichkeitsoptimal werden. Der Reaktanzzweipol von Bild 20 ist zum Beispiel an der Stelle $p_0 = \pm j\sqrt{3/2}$ empfindlichkeitsoptimal (Netzwerk 1).

Bild 20



Es gilt:

$$Z(p) = \frac{5p^3 + 3p}{4p^4 + \frac{14}{3}p^2 + 1}; \quad (2.24)$$

$$Z_{C_2}(j\sqrt{\frac{3}{2}}) = Z_{C_4}(j\sqrt{\frac{3}{2}}) = j\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{2}, \quad (2.25)$$

$$Z_{L_1}(j\sqrt{\frac{3}{2}}) = Z_{L_3}(j\sqrt{\frac{3}{2}}) = j\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{4}. \quad (2.26)$$

In Bild 21 ist der Frequenzverlauf von $\Phi^{1/2}$ aufgetragen, bezogen auf die theoretisch minimale Gesamtempfindlichkeit $\Phi_{min}^{1/2}$, die aus den Gln.(2.14b,c,15) zusammen mit den Gln.(1.34,35) unter der Annahme ermittelt wurde, daß die Impedanzfunktion Gl.(2.24) kanonisch realisiert wird. Wie leicht einzusehen ist, gilt für dieses Netzwerk dann

$$1 \leq \Phi^{1/2} / \Phi_{min}^{1/2} \leq 2, \quad \omega \text{ beliebig.} \quad (2.27)$$

Zum Vergleich ist in Bild 21 noch für eine weitere Realisierung (Bild 22) der Impedanzfunktion Gl.(2.24) die Größe $\Phi^{1/2} / \Phi_{min}^{1/2}$ aufgetragen (Netzwerk 2). Wie man sieht, besitzt Netzwerk 1 noch in größerer Umgebung des Frequenzpunktes $\omega_0 = 1.225$ eine wesentlich geringere Gesamtempfindlichkeit als Netzwerk 2.

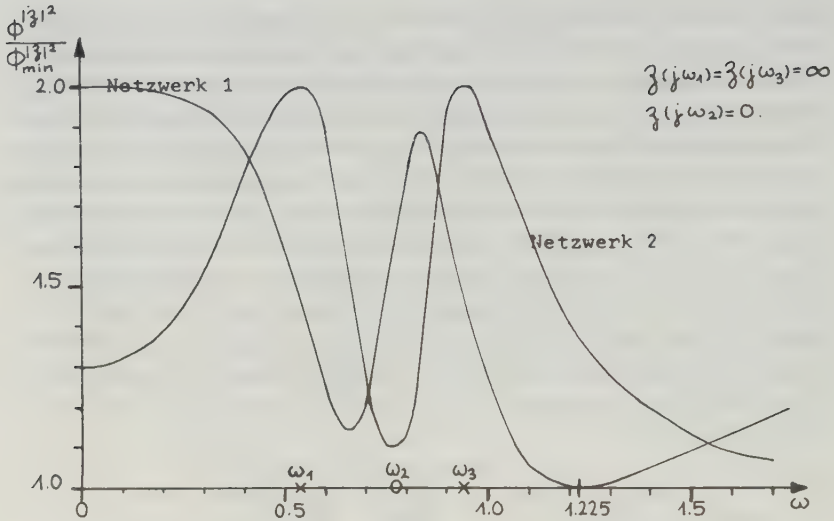


Bild 21

Bild 22



2.3.3 Der allgemeine RLC-Zweipol

Für diese Klasse von Netzwerken läßt sich der folgende Satz formulieren:

Satz 9: Es existiert kein linearer, passiver RLC-Zweipol, dessen Impedanzfunktion $Z(p)$ vom Grad $n \geq 3$ ist, so daß die Empfindlichkeiten von Z bezüglich aller Ohmwiderstände, aller Induktivitäten und aller Kapazitäten für beliebiges $p = j\omega$ jeweils gleich sind, d.h.

$$\frac{\partial Z}{\partial R_\mu} R_\mu = S_R^\mu(p), \quad \mu = 1, \dots, r; \quad (2.28a)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L_\mu} L_\mu = S_L^\mu(p), \quad \mu = 1, \dots, l; \quad (2.28b)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial C_\mu} C_\mu = S_C^\mu(p); \quad \mu = 1, \dots, c. \quad p = j\omega. \quad (2.28c)$$

Beweis: Es wird zunächst angenommen, daß ein empfindlichkeits-optimaler RLC-Zweipol vom Grad $n \geq 3$ vorliegt. Dann gilt wegen Gl.(1.57) und mit den Bezeichnungen von Bild 7:

$$S_{j_k}^2 = \frac{U_k \tilde{f}_k}{\tilde{f}_0^2}, \quad j_k = R_k, pL_k, 1/pC_k \quad (2.29)$$

Mit $U_k = j_k \tilde{f}_k$ folgt

$$S_{j_k}^2 = \frac{U_k^2}{j_k \tilde{f}_0^2}. \quad (2.30)$$

Wegen der Voraussetzung Gl.(2.28a) muß die Beziehung

$$\frac{U_{R_\mu}^2(p)}{R_\mu} = \frac{U_{R_k}^2(p)}{R_k}, \quad p = j\omega, \quad k, \mu = 1, \dots, r \quad (2.31)$$

für beliebiges R_μ, R_k und für jedes $p = j\omega$ erfüllt sein. Wie man sieht, gilt dann

$$U_{R_\mu}(p) = \pm \sqrt{\frac{R_\mu}{R_k}} U_{R_k}(p), \quad k, \mu = 1, \dots, r \quad (2.32a)$$

und analog mit $p = j\omega$

$$U_{L_\mu}(p) = \pm \sqrt{\frac{L_\mu}{L_k}} U_{L_k}(p), \quad k, \mu = 1, \dots, l; \quad (2.32b)$$

$$U_{C_\mu}(p) = \pm \sqrt{\frac{C_k}{C_\mu}} U_{C_k}(p), \quad k, \mu = 1, \dots, c. \quad (2.32c)$$

Greift man ein bestimmtes R_k, L_k, C_k heraus, so lassen sich wegen des Kompensationstheorems [17] sämtliche anderen Elemente $R_\mu, L_\mu, C_\mu, \mu \neq k$, durch spannungsgesteuerte Spannungsquellen mit frequenz-unabhängigen Steuerfaktoren gemäß den Gln.(2.32a-c) ersetzen. Der Wert der Impedanzfunktion wird durch dieses Vorgehen nicht beeinflußt. Der Zweipol und entsprechend der algebraische Ausdruck für die Impedanzfunktion enthält damit an passiven Elementen nur noch den Ohmwiderstand R_k , die Induktivität L_k und die Kapazität C_k . Da der Grad der Impedanzfunktion nicht größer sein kann als die Zahl der Energiespeicher im Netzwerk, ist die Behauptung bewiesen. Der Satz 9 enthält als Spezialfall die Aussage von Satz 8 und besagt insbesondere, daß keine empfindlichkeits-optimalen Realisierungen von RL- und RC-Zweipolen mit Grad $n > 1$ existieren. Daß Satz 8 getrennt aufgeführt wurde, liegt daran, daß sich sein Beweis und die Interpretation der Aussage im Zusammenhang mit Satz 3 noch relativ anschaulich führen ließ, während das beim allgemeinen RLC-Zweipol mit komplexen Empfindlichkeiten nicht mehr möglich ist.

2.3.4 Zum allgemeinen empfindlichkeitsoptimalen RLC-Netzwerk

Bei den im Abschnitt 2.3.1 und 2.3.2 behandelten Netzwerken besaßen die Empfindlichkeiten aller Elemente bzw. deren Imaginärteile prinzipiell das gleiche Vorzeichen. Bereits beim allgemeinen RLC-Zweipol mit normalerweise komplexen Empfindlichkeiten sind die Vorzeichen der Real- und Imaginärteile bezüglich der Elemente einer Bauelementesorte im allgemeinen nicht mehr alle gleich. Bei verschiedenen Vorzeichen können dann in den Gln.(1.29, 31) über die Summenempfindlichkeiten Differenzen aus nahezu gleich großen Termen auftreten, die wegen Gl.(2.6) Φ^f als Maß für die Gesamtempfindlichkeit ungünstig beeinflussen. Vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus werden daher (falls existent) Realisierungen mit jeweils gleichen Vorzeichen der Real- und Imaginärteile der Empfindlichkeiten in der Regel vorzuziehen sein.

Nun existieren Klassen von Netzwerken, bei denen prinzipiell nicht alle Bauelementeempfindlichkeiten das gleiche Vorzeichen besitzen können. Ein einfaches Beispiel hierfür sind Zweitore aus Ohmwidständen. So gilt für den Spannungsteiler in Bild 23: $f = U_2/U_1 = R_2/(R_1 + R_2)$;

$$S_{R_1}^f = -S_{R_2}^f = \frac{-R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

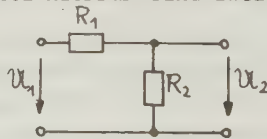


Bild 23

Wegen Gl.(1.29) muß

$$\sum_{\mu=1}^r S_{R_\mu}^f = 0 \quad (2.34)$$

gelten, da f eine dimensionslose Übertragungsfunktion ist. Damit Gl.(2.34) erfüllt wird, muß jede Realisierung dieses Spannungsteilers mindestens einen Widerstand mit negativer Empfindlichkeit enthalten, da trivialerweise nicht sämtliche Empfindlichkeiten gleich Null sein können. Auf Netzwerke dieser Art ist daher der Begriff empfindlichkeitsoptimal nicht anwendbar.

Im folgenden werden Übertragungsfunktionen von RLC-Zweitoren nach Bild 24 betrachtet, die durch eine ideale Spannungs- oder Stromquelle harmonisch erregt und im stationären Zustand betrachtet werden. Als Ausgangsgröße kommt eine Spannung zwischen zwei Knoten oder ein Zweigstrom in dem Netzwerk in Betracht.



Bild 24

Empfindlichkeitsoptimal bedeutet wieder, daß die Empfindlichkeiten der betrachteten Übertragungsfunktion bezüglich aller Ohm-widerstände, aller Induktivitäten und aller Kapazitäten für beliebiges $p=j\omega$ jeweils übereinstimmen.

Zunächst soll die Frage untersucht werden, ob bereits von der Netzwerkstruktur her^{*)}empfindlichkeitsoptimale Zweitore möglich sind. Der folgende Satz gibt darüber Auskunft für Reaktanznetzwerke.

Satz 10: Es existieren keine von der Struktur her^{*)}empfindlichkeitsoptimalen Reaktanzzweitore, die dimensionslose Übertragungsfunktionen vom Grad $n > 2$ realisieren.

Beweis: Für die dimensionslose Übertragungsfunktion

$$f(p) = Z(p)/N(p) \quad (=U_1/U_2) \quad \text{oder} \quad (=I_2/I_1) \quad (2.35a)$$

wobei $Z(p)$ bzw. $N(p)$ das Zähler- bzw. Nennerpolynom in Abhängigkeit von den Bauelementen darstellt, folgt zunächst mit den Gln.(1.29,31)

$$\sum_{\mu=1}^L S_{L_\mu}^f = \sum_{\nu=1}^C S_{C_\nu}^f = \frac{p}{2} \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (2.35b)$$

wobei das Netzwerk l Induktivitäten und c Kapazitäten enthält.

Im empfindlichkeitsoptimalen Fall gilt dann bei beliebigem $p=j\omega$:

$$S_{L_\mu}^f = \frac{p}{2L} \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \mu=1, \dots, l; \quad S_{C_\nu}^f = \frac{p}{2C} \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \nu=1, \dots, c. \quad (2.35c)$$

Mit Gl.(2.35a) folgt zunächst allgemein

$$\frac{p}{2L} \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{p}{2LN^2} \left(N \frac{\partial Z}{\partial p} - Z \frac{\partial N}{\partial p} \right). \quad (2.35d)$$

Andererseits gilt

$$S_{L_\mu}^f = \frac{L_\mu}{N^2} \left(N \frac{\partial Z}{\partial L_\mu} - Z \frac{\partial N}{\partial L_\mu} \right), \quad \mu=1, \dots, l. \quad (2.35e)$$

Hieraus erhält man wegen der Gln.(2.35c,d,e) im empfindlichkeitsoptimalen Fall

^{*)}d.h. die Werte für die einzelnen Widerstände, Induktivitäten, Kapazitäten in der betreffenden Netzwerkstruktur dürfen innerhalb von Intervallen mit endlicher Ausdehnung unabhängig voneinander variieren, ohne daß die Eigenschaft empfindlichkeitsoptimal verloren geht.

$$N\left(\frac{\partial Z}{\partial L_\mu} L_\mu - \frac{p}{2l} \frac{\partial Z}{\partial p}\right) = Z\left(\frac{\partial N}{\partial L_\mu} L_\mu - \frac{p}{2l} \frac{\partial N}{\partial p}\right); \quad \mu=1, \dots, l; \quad (2.36)$$

$p=j\omega$ beliebig.

Damit Gl.(2.36) erfüllt wird, müssen zwei Fälle unterschieden werden, aus denen sich notwendige Bedingungen über die Art der Netzwerke ergeben.

1. Die beiden Klammerausdrücke in Gl.(2.36) verschwinden identisch in p .

Dann ergibt die Bedingung, daß die Klammer auf der rechten Seite von Gl.(2.36) verschwindet unter der Berücksichtigung, daß $N(p)$ als gerades Polynom [47] die Form

$$N(p) = \sum_{\nu=0,2,\dots} a_\nu p^\nu \quad \text{mit } a_\nu \neq 0, \quad \nu=0,2,\dots,n \quad (2.37a)$$

besitzt:

$$\frac{\partial a_0}{\partial L_\mu} L_\mu = 0, \quad \frac{\partial a_\nu}{\partial L_\mu} L_\mu = \frac{\nu a_\nu}{2l}; \quad \begin{matrix} \mu=1, \dots, l; \\ \nu=2, 4, \dots, n. \end{matrix} \quad (2.37b)$$

Man sieht zunächst, daß mit $a_\nu \neq 0$ auch $\frac{\partial a_\nu}{\partial L_\mu} L_\mu = \frac{\nu a_\nu}{2l}$, $\mu=1, \dots, l$, $\nu=2, 4, \dots, n$ von Null verschieden sein muß. Da das Netzwerk strukturmäßig empfindlichkeitsoptimal sein soll und damit die Werte für L_μ zwischen bestimmten Grenzen variieren dürfen, kann Gl.(2.37b) nach L_μ differenziert werden. Wegen $\frac{\partial^2 a_\nu}{\partial L_\mu^2} = 0$

folgt daraus

$$\nu = 2l, \quad \nu = 2, 4, \dots, n; \quad \frac{\partial a_\nu}{\partial L_\mu} \neq 0 \quad (2.37c)$$

Da $2l$ eine fest gegebene Größe ist, kann ν nur einen einzigen Wert annehmen, nämlich $\nu=2=n$. Es gilt damit $l=1$. Völlig analoge Überlegungen ergeben $c=1$, so daß als Realisierungen von Spannungsübertragungsfunktionen nur die beiden trivialen Netzwerke von Bild 24a in Frage kommen.

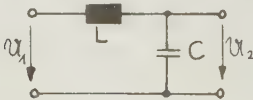


Bild 24a

2. Die beiden Klammerausdrücke in Gl.(2.36) verschwinden nicht identisch in p .

Aus Gl.(2.36) erhält man zunächst

$$f(p) = Z(p)/N(p) = \frac{\frac{\partial Z}{\partial L_\mu} L_\mu - \frac{p}{2l} \frac{\partial Z}{\partial p}}{\frac{\partial N}{\partial L_\mu} L_\mu - \frac{p}{2l} \frac{\partial N}{\partial p}}; \quad \mu=1, \dots, l$$

und hiermit

$$N(p) = K_{\mu} \left(\frac{\partial N}{\partial L_{\mu}} L_{\mu} - \frac{p}{2L} \frac{\partial N}{\partial p} \right), \quad \mu=1, \dots, l; \quad (2.38a)$$

$p=j\omega$ beliebig.

(Entsprechend gilt noch $Z(p) = K_{\mu} \left(\frac{\partial Z}{\partial L_{\mu}} L_{\mu} - \frac{p}{2L} \frac{\partial Z}{\partial p} \right)$).

Dabei sind die K_{μ} zunächst frequenzabhängig anzunehmen. Außerdem können die Ausdrücke für K_{μ} noch von der Größe der Netzwerkelemente abhängen. In dem speziellen Fall, der hier betrachtet wird mit variierbaren Netzwerkelementen kann jedoch eine Frequenzabhängigkeit ausgeschlossen werden. Denn bei gegenteiliger Annahme müßten Zähler und Nenner von $f(p)$ in Produktform bei zwar vorgegebener Netzwerkstruktur aber variierbaren Netzwerkelementen im allgemeinen redundante Faktoren enthalten, was sicher nicht der Fall ist.

Da $N(p)$ ein gerades Polynom ist, folgt aus Gl.(2.38a)

$$a_n p^n + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_0 = \quad (2.38b)$$

$$= K_{\mu} \left(S_{L_{\mu}}^{\alpha_{\mu}} p^n + S_{L_{\mu}}^{\alpha_{\mu}-2} p^{n-2} + \dots + S_{L_{\mu}}^{\alpha_{\mu}} - \frac{n \alpha_{\mu}}{2L} p^n - \frac{(n-2) \alpha_{\mu-2}}{2L} p^{n-2} - \dots - \frac{2 \alpha_2}{2L} p^2 \right);$$

$$\mu=1, \dots, l; \quad p=j\omega.$$

Koeffizientenvergleich liefert zunächst für die konstanten Terme

$$a_0 = K_{\mu} \frac{\partial a_0}{\partial L_{\mu}} L_{\mu}; \quad \mu=1, \dots, l. \quad (2.38c)$$

Wegen $a_0 \neq 0$ gilt damit auch $\frac{\partial a_0}{\partial L_{\mu}} \neq 0$. Differentiation von Gl.(2.38c) nach L_{μ} ergibt weiter

$$\frac{\partial a_0}{\partial L_{\mu}} = \frac{\partial K_{\mu}}{\partial L_{\mu}} \frac{\partial a_0}{\partial L_{\mu}} L_{\mu} + K_{\mu} \frac{\partial a_0}{\partial L_{\mu}}, \quad (2.38d)$$

womit schließlich

$$1 - K_{\mu} = S_{L_{\mu}}^{K_{\mu}} \quad \mu=1, \dots, l \quad (2.38e)$$

wird. Im allgemeinen Fall ($\nu \neq 0$) folgt aus Gl.(2.38b)

$$a_{\nu} = K_{\mu} \left(S_{L_{\mu}}^{\alpha_{\nu}} - \frac{\nu}{2L} a_{\nu} \right), \quad \nu=2, 4, \dots, n, \quad (2.38f)$$

bzw. nach Differentiation nach L_{μ} und unter Berücksichtigung von Gl.(2.38e):

$$\frac{\partial a_{\nu}}{\partial L_{\mu}} \left(1 - K_{\mu} - S_{L_{\mu}}^{K_{\mu}} \right) = - \frac{\nu}{2L} \left(a_{\nu} \frac{\partial K_{\mu}}{\partial L_{\mu}} + K_{\mu} \frac{\partial a_{\nu}}{\partial L_{\mu}} \right) = 0. \quad (2.38g)$$

$$\mu=1, \dots, l; \quad \nu=2, 4, \dots, n; \quad p=j\omega \text{ beliebig.}$$

Setzt man $a_{\nu} = a_{\nu 0}^{(L_{\mu})} + a_{\nu 1}^{(L_{\mu})} L_{\mu}$ sowie $\frac{\partial K_{\mu}}{\partial L_{\mu}} = \frac{1 - K_{\mu}}{L_{\mu}}$ (Gl.(2.38e)) in die rechte Seite der Gl.(2.38g) ein, so ergibt sich:

$$K_{\mu} = 1 + \frac{a_{\nu 1}^{(L_{\mu})}}{a_{\nu 0}^{(L_{\mu})}} L_{\mu}, \quad \mu=1, \dots, l; \quad \nu=2, 4, \dots, n. \quad (2.38h)$$

Hieraus folgt weiter $S_{L\mu}^{K\mu} = \frac{\partial K\mu}{\partial L\mu} L\mu = \frac{\frac{\partial L\mu}{\partial a_{\nu 0}}}{\frac{\partial L\mu}{\partial a_{\nu 0}}} L\mu$ und wegen Gl.(2.38h) schließlich

$$1 - K\mu = -S_{L\mu}^{K\mu}, \quad \mu=1, \dots, l \quad (2.38i)$$

im Gegensatz zu Gl.(2.38e). Damit die Gln.(2.38e,i) keinen Widerspruch darstellen, muß $S_{L\mu}^{K\mu} = 0$ gelten, womit $K\mu = 1$ wird und wegen Gl.(2.38h) $\frac{\partial L\mu}{\partial a_{\nu 0}} = 0$ für jedes $L\mu$, $\mu=1, \dots, l$ erfüllt sein muß. Da analoge Überlegungen für die Kapazitäten gelten, muß notwendigerweise $a_{\nu} = 0$, $\nu=2, 4, \dots, n$ sein, so daß das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion vom Grad Null ist. Da außerdem der Zählergrad der Übertragungsfunktion $f = U_1/U_1$ nicht größer sein kann als der Nennergrad [47], kommen als Netzwerke in diesem Fall zunächst nur kapazitive oder induktive Spannungsteiler in Frage. Diese Konfigurationen können jedoch wegen der obigen Vorbemerkungen prinzipiell nicht empfindlichkeitsoptimal sein, so daß schließlich nur die beiden trivialen Netzwerke von Bild 24a als strukturoptimale Realisierungen übrig bleiben. w.z.b.w.

Nachdem die Frage nach strukturoptimalen Zweitoren negativ ausgegangen ist, muß untersucht werden, ob durch zusätzliche numerische Nebenbedingungen an die Netzwerkelemente empfindlichkeitsoptimale Übertragungsfunktionen realisiert werden können.

Eine so allgemeine Aussage wie Satz 9 für RLC-Zweipole konnte hier allerdings nicht gefunden werden. Das liegt zum Teil daran, daß die Klasse der einbezogenen Netzwerke sehr groß ist. Wesentlich ist außerdem, daß die Gl.(1.57) entsprechenden Relationen für Empfindlichkeiten bei Zweitoren (die sich für reziproke Netzwerke z.B. in [7] finden) so allgemein sind, daß sich daraus keine Schlüsse mehr ziehen lassen.

Es sollen aber Gründe angegeben werden, warum für die betrachtete Klasse von Netzwerken kaum empfindlichkeitsoptimale Realisierungen von Übertragungsfunktionen höheren Grades zu erwarten sind. Ausgegangen wird von der Überlegung, daß der Grad einer realisierten Netzwerkfunktion von der Zahl der Energiespeicher abhängt, so daß zunächst Induktivitäten und Kapazitäten betrachtet werden. Für deren Empfindlichkeiten gilt bei beliebiger Netzwerkfunktion f die allgemeine Summenregel Gl.(1.31).

$$\sum_{\mu=1}^L S_{L\mu}^f + \sum_{\mu=1}^C S_{C\mu}^f = S_P^f. \quad (1.31)$$

Im empfindlichkeitsoptimalen Fall vereinfacht sich Gl.(1.31) zu

$$l S_{L_\alpha}^f + c S_{C_\beta}^f = S_p^f, \quad \alpha=1, \dots, l, \quad (2.39) \\ \beta=1, \dots, c; p=j\omega.$$

Die letzte Gleichung muß nun interpretiert werden. Für L_α bzw. C_β kann irgendeine der im Netzwerk enthaltenen l Induktivitäten bzw. c Kapazitäten gewählt werden. Durch die linken Seiten von Gl.(1.31) bzw. Gl.(2.39) ist der Verlauf der Netzwerkfunktion $f(p)$ bis auf eine von p unabhängige Konstante festgelegt. Gl.(2.39) besagt, daß im empfindlichkeitsoptimalen Fall der Einfluß jeder Induktivität und Kapazität auf die Netzwerkfunktion für beliebiges $p=j\omega$ jeweils gleich groß ist. Sämtliche Induktivitäten und Kapazitäten sind also in ihrer Bedeutung für die Netzwerkfunktion jeweils gleichwertig. Betrachtet man Gl.(1.31) nach Multiplikation mit einer infinitesimalen positiven Größe ϵ an der Stelle $p_0=j\omega_0$, so läßt sich die linke Seite dieser Gleichung als der lineare Term einer Taylorentwicklung der Funktion f um die Stelle $p_0=j\omega_0$ auffassen, wenn alle Induktivitäten und Kapazitäten um die Werte ϵL_α bzw. ϵC_β vergrößert werden, was einer additiven Änderung des Frequenzparameters um den Wert ϵp_0 entspricht. Im empfindlichkeitsoptimalen Fall genügt es aber zu diesem Zweck, gemäß Gl.(2.39) eine einzige, beliebig herausgegriffene Induktivität um den Wert ϵl und eine beliebige Kapazität um den Wert ϵc zu vergrößern. Dies gilt für jedes p . Durch Änderung von nur zwei Reaktanzen könnte also der Frequenzgang der realisierten Netzwerkfunktion in der Umgebung eines beliebigen Punktes p_0 in erster Näherung beschrieben werden. Das stellt eine sehr starke Forderung dar, die wohl kaum durch Realisierungen mit vielen Reaktanzen, d.h. von Netzwerkfunktionen höheren Grades erfüllt werden kann.

Nach den Ergebnissen der Abschnitte 2.3.2 und 2.3.3 läge die Vermutung nahe, daß auch Übertragungsfunktionen von Zweitoren nur maximal bis Grad zwei empfindlichkeitsoptimal realisiert werden können. Das folgende Beispiel zeigt jedoch eine empfindlichkeitsoptimale Realisierung einer Übertragungsfunktion dritten Grades (Bild 24b). Es gilt:

$$f = \frac{U_2}{I_1} = \frac{R_1 R_2}{p^3 R_1 R_2 C_1 C_2 L + p^2 L (R_1 C_1 + R_2 C_2) + p(L + R_1 R_2 (C_1 + C_2)) + R_1 + R_2} \quad (2.40)$$

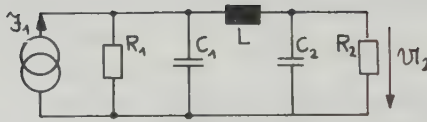


Bild 24b

Man sieht aus dem Aufbau der Koeffizienten, daß für $R_1 = R_2$ und $C_1 = C_2$ die entsprechenden Empfindlichkeiten bei allen Frequenzen übereinstimmen.

Für das Netzwerk von Bild 24b stimmen im empfindlichkeitsoptimalen Fall die Koeffizientenempfindlichkeiten für die Ohmwiderstände und die Kapazitäten jeweils überein. Man könnte vermuten, daß diese für den empfindlichkeitsoptimalen Fall hinreichende Bedingung auf die Struktursymmetrie des obigen Netzwerks zurückzuführen ist. Wie zahlreiche Beispiele ergaben, genügt aber Struktursymmetrie keineswegs, damit eine realisierte Netzwerkfunktion selbst mit zusätzlichen Nebenbedingungen an die Elemente empfindlichkeitsoptimal wird. Außerdem ist dies keine notwendige Voraussetzung, wie das folgende Netzwerk (Bild 24c) anhand der Nennerkoeffizienten der entsprechenden Netzwerkfunktion zeigt.

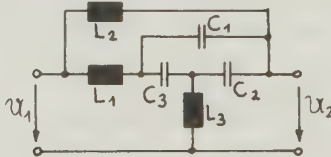


Bild 24c

$$f = \frac{U_2}{U_1} = \frac{p^4 L_3 (L_1 + L_2) (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3) + p^2 (L_1 (C_1 + C_3) + L_2 C_1 + L_3 (C_2 + C_3)) + 1}{p^4 (L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3) + p^2 (L_1 (C_1 + C_3) + L_2 (C_1 + C_2) + L_3 (C_2 + C_3)) + 1} \quad (2.41)$$

Mit $L_1 = L_2 = L_3$ und $C_1 = C_2 = C_3$ sind die Empfindlichkeiten der Nennerkoeffizienten optimal. Allerdings sieht man aus der Struktur der Zählerkoeffizienten, daß das Netzwerk von Bild 24c die Übertragungsfunktion prinzipiell nicht empfindlichkeitsoptimal realisieren kann. Im übrigen konnte auch bisher kein empfindlichkeitsoptimales Netzwerk für Übertragungsfunktionen vierten oder höheren Grades gefunden werden.

Zum Schluß sei noch eine Bemerkung zu einer oft zitierten These

[21,43,44] von LEEDS, UGRON [7] angeführt. Es wird dort behauptet, daß ein Netzwerk, das nach Durchführung eines Optimierverfahrens [3] an einer Stelle $p_0 = j\omega_0$ empfindlichkeitsoptimal ist, dann auch für beliebiges $p = j\omega$ gegenüber äquivalenten Netzwerken ein kleineres Φ^f besitzen würde. Bisher hegte nur HAYKIN [24] Zweifel an der Richtigkeit dieser Behauptung. Nach den Ausführungen des letzten Abschnitts dürften aber Realisierungen von Netzwerkfunktionen höheren Grades minimales Φ^f nur an diskreten Frequenzpunkten besitzen. An anderen Stellen wird es dann möglich sein, daß ein äquivalentes Netzwerk ein kleineres Φ^f besitzt. Speziell an Nullstellen von Übertragungsfunktionen, die auf der imaginären Achse liegen, wird es sich zeigen (siehe Abschnitt 2.5.1.2 sowie 4.3.2), daß sich an diesen Stellen die Kurven für die Gesamt-empfindlichkeit Φ^f bei bestimmten Klassen von äquivalenten Netzwerken schneiden. Die wesentliche Folgerung hieraus ist, daß es für die jetzt zu besprechenden Optimierungsverfahren der Gesamt-empfindlichkeit keineswegs genügt, sich auf einen einzigen Frequenzpunkt zu beschränken.

2.4 Empfindlichkeitsoptimierung

Die Ergebnisse des letzten Abschnitts haben gezeigt, daß es für Netzwerkfunktionen höheren Grades nicht möglich erscheint, eine in einem ganzen Frequenzbereich empfindlichkeitsoptimale Realisierung zu finden. Es stellt sich deshalb das Problem, bei gegebenem Aufwand an Elementen eine Realisierung zu finden, die die Anforderungen an ein empfindlichkeitsoptimales Netzwerk wenigstens annähernd erfüllt. Die Schwierigkeiten, die bei der Behandlung dieses Problems auftauchen und die bisher eine zufriedenstellende Lösung der Frage verhinderten, werden jetzt diskutiert.

Gemäß der Definition des Abschnitts 2.2 über das empfindlichkeitsoptimale Netzwerk soll zu einer gegebenen Netzwerkfunktion $f(p)$ eine Realisierung gefunden werden, so daß das Integral

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \Phi^f(\omega) d\omega \quad (2.42)$$

möglichst klein wird, wobei $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_1$ den interessierenden Frequenzbereich darstellt. Geometrisch läßt sich dieses Problem für eine vorgegebene Netzwerkfunktion $f(\omega)$ mit reellen Werten für f

folgendermaßen deuten: Gegeben ist ein multidimensionaler Raum, dessen Koordinaten eindeutig mit den Netzwerkelementen verknüpft sind. Die Netzwerkfunktion $f(\omega)$ stellt für festes ω im allgemeinen eine Fläche höherer Ordnung in diesem Raum dar. Eine beliebige Realisierung von f wird durch einen Punkt A auf dieser Fläche gekennzeichnet. Gesucht ist ein Punkt B , für den der Ausdruck Gl.(2.42) einen minimalen Wert annimmt. Aus praktischen Erwägungen ist es sinnvoll, nur solche bezüglich f äquivalenten Netzwerke zu betrachten, die sich mit einem begrenzten Maximalaufwand an Elementen realisieren lassen. Es stellt sich dann aber die Frage, ob damit die Fläche nicht in einzelne diskrete Teilgebiete entartet. Ein Beispiel hierfür stellt die Menge aller kanonischen Realisierungen der Impedanzfunktion eines Reaktanzzweipols dar; die Fläche ist hier in eine Menge diskreter Punkte zerfallen.

Der bisher bedeutendste Vorschlag, auf der Fläche aller bezüglich einer Netzwerkfunktion f äquivalenten Netzwerke einen Punkt bzw. eine Realisierung mit gutem Empfindlichkeitsverhalten zu finden, stammt von SCHOEFFLER [3]. Sein Gedanke war, ausgehend von einem gegebenem RLC-Netzwerk, das die betrachtete Funktion realisiert, durch eine Folge gezielter Äquivalenztransformationen zu einem neuen Netzwerk mit geringerer Gesamttempfindlichkeit zu gelangen. Im folgenden wird das Verfahren kurz beschrieben.

Das Ausgangsnetzwerk, das (einschließlich Bezugsknoten) $n+1$ Knoten besitzen möge, wird durch das Gleichungssystem

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U} \quad (2.43)$$

beschrieben, wobei $\underline{Y}$ die Knotenadmittanzmatrix, $\underline{U}$ der Vektor der Knotenpotentiale und $\underline{I}$ der Vektor der in die Knoten eingespeisten Ströme ist. Mit $\underline{A}$ als einer nichtsingulären $n \times n$ Matrix gelangt man zu einem neuen Netzwerk mit Hilfe der folgenden linearen Transformation:

$$\underline{U} = \underline{A} \underline{U}', \quad (2.44)$$

$$\underline{I}' = \underline{A}^t \underline{I}, \quad (2.45)$$

$$\underline{Y}' = \underline{A}^t \underline{Y} \underline{A}, \quad (2.46)$$

$$\underline{I}' = \underline{Y}' \underline{U}'. \quad (2.47)$$

Dabei bezeichnen $\underline{I}'$, $\underline{Y}'$, $\underline{U}'$ die Größen des neuen Netzwerks, $\underline{A}^t$

die transponierte Matrix $\underline{A}$. Durch geeignete Wahl von $\underline{A}$ bleiben bestimmte Knotenpotentiale oder Zweigströme bei der Transformation invariant. Entsprechend kann auch die Differenz zweier Knotenpotentiale und damit etwa eine Übertragungsfunktion vom Typ $f = \mathcal{U}_2 / \mathcal{U}_1$ oder $f = \mathcal{U}_2 / \mathcal{I}_1$ bezüglich der Transformation invariant gehalten werden.

Eine Schwierigkeit dieser zuerst von CAUER [12] beschriebenen Transformation liegt darin, daß sich bei größeren Werten für die Koeffizienten der Transformationsmatrix negative Elemente im neuen Netzwerk ergeben können. SCHOEFFLER versuchte dieses Problem dadurch zu lösen, indem er seine Transformationsmatrix nur wenig verschieden von der Einheitsmatrix wählte:

$$\underline{A} = \underline{E} + \underline{B} x, \quad |b_{\mu\nu}| \leq 1. \quad (2.48)$$

Dabei ist $\underline{E}$ die Einheitsmatrix und x eine betragsmäßig kleine reelle Größe, deren Wert die Größe des Transformationsschrittes bestimmt. Betrachtet man die neue Admittanzmatrix $\underline{Y}'$ in Abhängigkeit von x , so erhält man mit den Gln. (2.46, 48)

$$\underline{Y}' = (\underline{E} + \underline{B}x)^t \underline{Y} (\underline{E} + \underline{B}x) = \underline{Y} + (\underline{Y} \underline{B} + \underline{B}^t \underline{Y})x + \underline{B}^t \underline{Y} \underline{B} x^2. \quad (2.49a)$$

Differentiation von Gl. (2.49a) nach x ergibt anschließend mit $x = 0$

$$\frac{d\underline{Y}}{dx} = \underline{Y} \underline{B} + \underline{B}^t \underline{Y} \quad (2.49b)$$

sowie

$$\underline{Y}'(x=0) = \underline{Y}. \quad (2.50)$$

Die Knotenadmittanzmatrix $\underline{Y}$ läßt sich in der Form

$$\underline{Y} = \underline{\tilde{G}} + p \underline{\tilde{C}} + \tilde{H}/p \quad (2.51)$$

schreiben, wobei die $n \times n$ Matrizen $\underline{\tilde{G}}$, $\underline{\tilde{C}}$, $\underline{\tilde{H}}$ die entsprechenden Teilmatrizen für die ohmschen Leitwerte, Kapazitäten und die reziproken Induktivitäten darstellen. Mit Gl. (2.49b) folgt dann zunächst

$$\frac{d\underline{\tilde{G}}}{dx} = \underline{\tilde{G}} \underline{B} + \underline{B}^t \underline{\tilde{G}}, \quad (2.52a)$$

$$\frac{d\underline{\tilde{C}}}{dx} = \underline{\tilde{C}} \underline{B} + \underline{B}^t \underline{\tilde{C}}, \quad (2.52b)$$

$$\frac{d\underline{\tilde{H}}}{dx} = \underline{\tilde{H}} \underline{B} + \underline{B}^t \underline{\tilde{H}}. \quad (2.52c)$$

Durch Umschreiben der Gln. (2.52a-c) erhält man weiter

$$d\underline{\tilde{G}}/dx = \underline{M} \underline{\tilde{G}}, \quad d\underline{\tilde{C}}/dx = \underline{M} \underline{\tilde{C}}, \quad d\underline{\tilde{H}}/dx = \underline{M} \underline{\tilde{H}}, \quad (2.53a-c)$$

wobei $\underline{G}$, $\underline{C}$, $\underline{H}$ $\frac{n(n+1)}{2}$ -komponentige Spaltenvektoren der zwischen den Knoten des Netzwerks liegenden ohmschen Leitwerte, Kapazitäten und reziproken Induktivitäten sind. Die Reihenfolge der zwischen den einzelnen Knoten liegenden Elemente muß dabei in den Spaltenvektoren $\underline{G}$, $\underline{C}$, $\underline{H}$ übereinstimmen, kann aber sonst beliebig gewählt werden. Die Koeffizienten der Matrix $\underline{M}$ hängen von der Topologie des Netzwerks ab und sind Linearkombinationen der $b_{\mu\nu}$. Ähnliche Beziehungen lassen sich auch für die zu den Empfindlichkeiten proportionalen Größen $(1/f)(\partial f/\partial g_\mu)$ aufstellen. Mit

$$\underline{Q}_G^t = \left\{ \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial g_1}, \dots, \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial g_m} \right\} \quad (2.54)$$

gilt nämlich [3] :

$$\frac{d\underline{Q}_\alpha}{dx} = - \underline{M}^t \underline{Q}_\alpha, \quad \alpha = G, C, H. \quad (2.55)$$

Anschließend wird die Größe Φ^f gemäß Gl.(2.6) sowie $d\Phi^f/dx$ errechnet. Φ^f als Funktion von x soll möglichst klein werden. Wendet man die Gradientenmethode an, so muß $d\Phi^f/dx$ möglichst negativ sein. Da $d\Phi^f/dx$ linear von den Koeffizienten der Matrix $\underline{M}$ abhängt [3], die die Transformationsparameter $b_{\mu\nu}$ enthält, lassen sich letztere für den nächsten Transformationsschritt entsprechend wählen. Durch eine Folge solcher infinitesimaler Äquivalenztransformationen soll schließlich das Minimum von Φ^f erreicht werden. Da bei jeder Transformation die Werte der Elemente nur wenig geändert werden, glaubt SCHOEFFLER durch numerische Techniken das Auftreten negativer Elemente verhindern zu können.

Der wesentliche Gedanke bei dem eben beschriebenen Verfahren war, daß durch schrittweise, infinitesimale Transformationen der Admittanzmatrix gezielt ein Netzwerk mit geringerer Gesamtempfindlichkeit gefunden werden soll. Eine eingehende Untersuchung des Verfahrens ergibt jedoch Anlaß zu kritischen Bemerkungen:

1. Durch die Äquivalenztransformation von CAUER läßt sich nur eine begrenzte Teilmenge aller bezüglich f äquivalenten Netzwerke erfassen. Beispiele hierzu finden sich im Abschnitt 1.4. Außerdem ist zunächst bei gegebenem Rang der Admittanzmatrix auch die Zahl der Knoten im Netzwerk festgelegt und bezüglich aller Transformationen konstant. (Diese Einschränkung kann allerdings dadurch aufgehoben werden, daß das Ausgangsnetzwerk

um eine Anzahl (zunächst isolierter) Knoten erweitert wird. Anhand Gl.(2.49a) ist zu ersehen, daß diese Knoten im Verlauf mehrerer Transformationsschritte durch Netzwerkelemente (mit von Null oder Unendlich verschiedenen Werten) mit den übrigen Knoten verbunden werden).

2. Sehr nachteilig ist ferner, daß sich wegen des komplizierten Zusammenhangs zwischen der Transformationsmatrix $\underline{A}$ und der neuen Admittanzmatrix $\underline{Y}' = \underline{A}^+ \underline{Y} \underline{A}$ die Topologie des neuen Netzwerks durch passende Wahl der Koeffizienten der Transformationsmatrix praktisch nicht beeinflussen läßt. Die durchgerechneten Beispiele ergaben nach wenigen Transformationsschritten einen total vernetzten Graphen, obwohl nur einige Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ in der Transformationsmatrix von Null verschieden waren. Die neu gewonnenen Netzwerke besaßen zwar geringere Gesamtempfindlichkeit als das Ausgangsnetzwerk, was aber mit einem großen Aufwand an redundanten Elementen erkauft wird, der mit zunehmender Knotenzahl schnell unerträglich wird.

Man könnte hier versuchen, durch Aufstellen von Nebenbedingungen für die Transformationsmatrix $\underline{M}$ das Auftreten neuer Elemente zwischen einzelnen Knoten zu verhindern. Dies führt auf komplizierte Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ und es kann dadurch sehr schnell der Fall eintreten, daß die transformierten Netzwerke stets negative Elemente enthalten bzw. keine sinnvolle Transformation mehr möglich ist.

3. Wesentlich ist außerdem, daß das ganze Optimierungsverfahren nur an einem einzigen Frequenzpunkt durchgeführt wird. Interessiert das Empfindlichkeitsverhalten des Netzwerks in einem ganzen Frequenzintervall, dann genügt eine Optimierung an einem einzigen Frequenzpunkt keineswegs, da äquivalente Realisierungen bei verschiedenen Frequenzen im allgemeinen eine verschiedene Gesamtempfindlichkeit besitzen, wie bereits im Abschnitt 2.3 gezeigt wurde. Verwendet man Gl.(2.42) als Zielfunktion für die Optimierung, dann wird die Berechnung von $\Phi^f(\omega)$ an mehreren Frequenzpunkten gleichzeitig erforderlich. Dadurch wird es aber noch aufwendiger, einen sinnvollen Satz von Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ für eine Transformation so zu bestimmen, daß

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\omega_0}^{\omega_1} \Phi^f(x, \omega) d\omega \right) \quad (2.56)$$

möglichst negativ wird.

Das Verfahren von SCHOEFFLER in seiner ursprünglichen Form ist damit für eine praktische Anwendung nicht geeignet. Zwei Gründe sind ausschlaggebend. Zunächst ist die Transformation Gl.(2.46) einer Netzwerkmatrix (es muß nicht unbedingt die Knotenadmittanzmatrix sein) kein ideales Mittel zur Erzeugung äquivalenter Netzwerke. Außerdem ist es notwendig, daß die einzelnen Netzwerke stetig ineinander überführt werden können, da sonst kein schrittweises und iteratives Optimierungsverfahren angewendet werden kann. Daß diese Voraussetzung nicht immer erfüllt ist, zeigt das bereits erwähnte Beispiel der kanonischen Realisierungen von Reaktanzzweipolen.

Als Alternative zu dem beschriebenen, allerdings sehr allgemein gehaltenen Optimierverfahren könnte man fragen, inwieweit nicht schon bei der Synthese eines Netzwerks die Nebenbedingung eines guten Empfindlichkeitsverhaltens berücksichtigt werden kann. Dazu einige Bemerkungen.

Die in der Netzwerksynthese bekannten Verfahren, zu einer gegebenen Netzwerkfunktion $f(p)$ eine Realisierung zu finden, beruhen meist auf einer sukzessiven Abspaltung von Teilfunktionen niederen Grades aus $f(p)$, die sich ihrerseits durch einfache Netzwerke realisieren lassen [47]. Anhand der Klasse der Reaktanzzweipolfunktionen wird dieser Vorgang im Zusammenhang mit dem Empfindlichkeitsproblem erörtert.

Für Reaktanzzweipole sind mehrere allgemeine Realisierungsverfahren bekannt. Durch Kombination dieser Methoden lassen sich eine Vielzahl äquivalenter Schaltungen gewinnen. Darunter ist ein Netzwerk, das bei vorgegebener Maximalzahl an Elementen und an einem vorgegebenen Frequenzpunkt gegenüber den anderen Realisierungen das geringste Φ^f besitzt. Sei nun die Impedanzfunktion $Z(p)$ eines Reaktanzzweipols gegeben und diese Realisierung gesucht. Dann lassen sich bei festgelegter Maximalzahl an Netzwerkelementen die Größen der Einzelempfindlichkeiten für $\Phi_{\min}^Z$ aus den Gln. (1.34,35) entnehmen. Den ersten Entwicklungsschritt könnte man

so wählen, daß die entsprechenden Elementeempfindlichkeiten den idealen Werten annähernd entsprechen. Läßt sich der Abspaltvorgang als Differenzbildung

$$z_1(p) = z(p) - z_0(p) \quad (2.57)$$

darstellen, dann bleiben die Empfindlichkeiten von z bezüglich der $z_0(p)$ realisierenden Elemente bei allen weiteren Entwicklungsschritten unverändert. Mit der Wahl von $z_0(p)$ wird die Restfunktion $z_1(p)$ und damit auch die Zahl der möglichen Realisierungen für $z_1(p)$ festgelegt.

Entscheidend ist nun, daß vom numerischen Wert von $z_1(p)$ allein noch nicht auf die Möglichkeit einer Realisierung mit gutem Empfindlichkeitsverhalten geschlossen werden kann. Das heißt, $z_0(p)$ müßte so gewählt werden, daß nicht nur die zur Realisierung von $z_0(p)$ verwendeten Elemente möglichst optimale Empfindlichkeiten $S_{x_n}^z$ besitzen, sondern auch im Hinblick auf die verbleibenden Realisierungsmöglichkeiten für $z_1(p)$. Über das Empfindlichkeitsverhalten dieser Netzwerke läßt sich aber von vornherein nichts aussagen, da erst die Netzwerkfunktion $z_1(p)$ im Zusammenhang mit der Topologie eines Netzwerks eine Berechnung von Empfindlichkeiten erlaubt. Erst nach einer Analyse aller möglichen Realisierungen könnte so das beste Netzwerk für $z_1(p)$ ermittelt werden. Gerade das aber will man vermeiden. Die Synthese elektrischer Netzwerke unmittelbar mit der Forderung nach geringer Gesamtempfindlichkeit zu verknüpfen, dürfte daher im allgemeinen nicht möglich sein, da allein aufgrund der Übertragungsfunktion in der Regel nicht auf die günstigste Netzwerkstruktur geschlossen werden kann.

2.5 Prinzipielle Gesichtspunkte zur Synthese von Netzwerken mit gutem Empfindlichkeitsverhalten

Der letzte Abschnitt hat gezeigt, daß eine explizit angegebene Netzwerkfunktion erst in Verbindung mit einer bestimmten Netzwerkstruktur eine genaue Aussage über die Größe der Gesamtempfindlichkeit erlaubt. Gerade diese Verknüpfung eines numerischen Problems (d.h. sämtliche Elementeempfindlichkeiten gleich groß) mit einer Strukturfrage (Wahl der Netzwerktopologie) verhindert weit-

gehend das Aufstellen allgemeiner Zusammenhänge.

Die Hauptschwierigkeit liegt darin, daß bei gegebener Netzwerkfunktion an verschiedenen Frequenzpunkten im allgemeinen verschiedene Realisierungen das jeweils bessere Empfindlichkeitsverhalten besitzen, ohne daß zunächst eine Erklärung möglich erscheint. Für einige Klassen von Netzwerken lassen sich aber allgemeingültige Zusammenhänge bzw. Regeln aufstellen, die eine Hilfe bei der Beurteilung der Gesamtempfindlichkeit eines Netzwerks darstellen. Im folgenden wird das anhand von LC- und RC-Netzwerken beschrieben.

2.5.1 Reaktanznetzwerke

2.5.1.1 Reaktanzzweipole

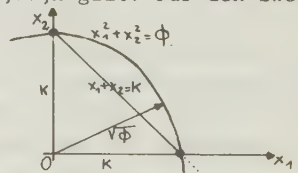
Die betrachtete Netzwerkfunktion sei die Impedanz eines Reaktanzzweipols. Mit den Gln.(1.32,33) ergibt sich zunächst bei gegebener Impedanzfunktion Z für die Summenempfindlichkeiten von $|Z|^2$ bezüglich der Induktivitäten und Kapazitäten

$$\sum_{\mu=1}^L S_{L_{\mu}}^{|\dot{Z}|^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial |\dot{Z}|^2}{\partial \omega} \omega + 2 |\dot{Z}|^2 \right), \quad (2.58a)$$

$$\sum_{\nu=1}^C S_{C_{\nu}}^{|\dot{Z}|^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial |\dot{Z}|^2}{\partial \omega} \omega - 2 |\dot{Z}|^2 \right). \quad (2.58b)$$

Wegen Gl.(2.11) und Satz 2 besitzen dann die Empfindlichkeiten $S_{L_{\mu}}^{|\dot{Z}|^2}$, $S_{C_{\nu}}^{|\dot{Z}|^2}$ für beliebiges ω untereinander jeweils das gleiche Vorzeichen. $\Phi^{|\dot{Z}|^2} = \sum_{\mu} (S_{L_{\mu}}^{|\dot{Z}|^2})^2 + \sum_{\nu} (S_{C_{\nu}}^{|\dot{Z}|^2})^2$ wird daher maximal, wenn die Empfindlichkeit von $|\dot{Z}|^2$ bezüglich nur einer Induktivität und Kapazität von Null verschieden ist.^{*)} Die Größen dieser Empfindlichkeiten müssen dann mit den Werten der rechten Seiten der Gln.(2.58a,b)

*) Anschaulich handelt es sich bei reellen Empfindlichkeiten (eine Elementesorte) um das Problem, einen Satz von Größen x_{μ} so zu finden, daß $\Phi = x_1^2 + \dots + x_n^2$ maximal wird, wobei außerdem $x_1 + \dots + x_n = K$ erfüllt sein muß und für $K > 0$ auch $x_{\mu} \geq 0, \mu = 1, \dots, n$ gilt. Für den zweidimensionalen Fall ist also der größtmögliche Radius $\Phi_{\max}$ des Kreises $x_1^2 + x_2^2 = \Phi_{\max}$ so gesucht, daß noch Schnittpunkte mit der Gerade $x_1 + x_2 = K$ ($K > 0$) im abgeschlossenen 1. Quadranten der $x_1 x_2$ -Ebene auftreten. Man sieht, als Lösung kommt $x_1 = K, x_2 = 0$ oder $x_1 = 0, x_2 = K$ in Frage, womit dann $\Phi = K^2$ wird. Außerdem ist zu ersehen, daß ohne Vorzeichenbeschränkungen für die Empfindlichkeiten zunächst keine Angabe einer maximalen Gesamtempfindlichkeit $\Phi_{\max}$ möglich ist.



übereinstimmen, womit man schließlich

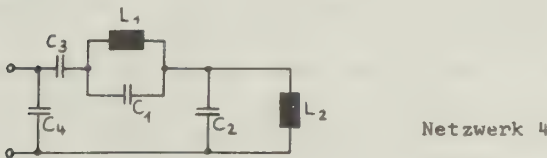
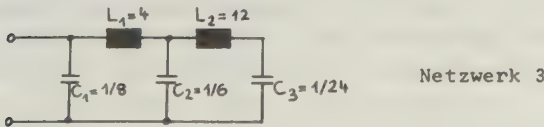
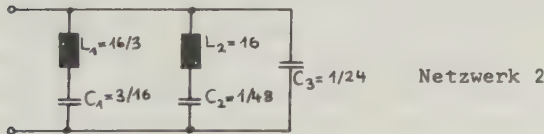
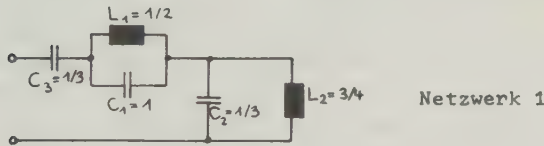
$$\Phi_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \Phi^2}{\partial \omega} \right)^2 + 4|\Phi|^4 \right) \quad (2.58c)$$

erhält. Obwohl dadurch der Unterschied zwischen verschiedenen äquivalenten Realisierungen in der Gesamtempfindlichkeit begrenzt wird, können sich trotzdem erhebliche Unterschiede ergeben, wie das folgende Beispiel anhand einer Reaktanzzweifolfunktion 5. Grades verdeutlicht.

Gegeben sei die Impedanzfunktion

$$Z = \frac{8(p^2+1)(p^2+3)}{p(p^2+2)(p^2+4)} \quad (2.59)$$

Die ersten drei Netzwerke (Bild 26) sind kanonische Realisierungen von Z , während Netzwerk 4 zusätzlich ein redundantes Element enthält und topologisch eine Erweiterung von Netzwerk 1 darstellt.



$L_1 = 2.2944$
 $C_1 = 0.0604$
 $L_2 = 0.7354$
 $C_2 = 0.5809$
 $C_3 = 0.2533$
 $C_4 = 0.08$

Bild 26

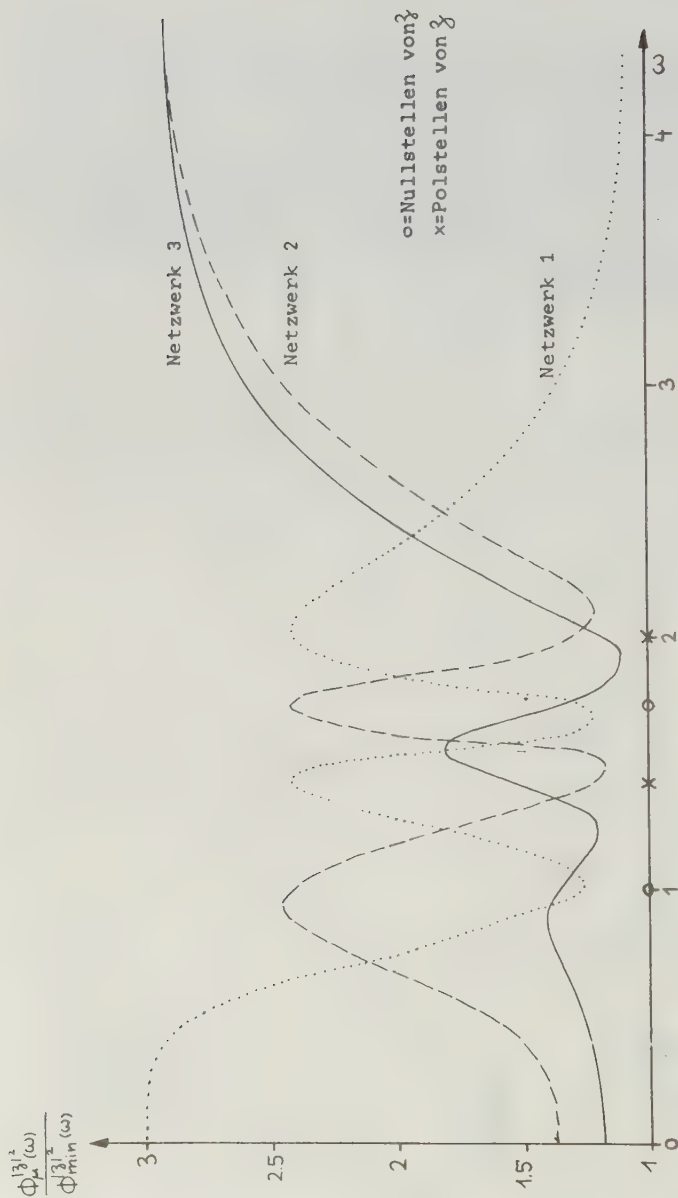


Bild 27: Frequenzverlauf der Gesamttempfindlichkeit der Reaktanzzeipole 1,2,3 aus Bild 26, bezogen auf die theoretisch minimale Gesamttempfindlichkeit

Bild 27 zeigt für die Netzwerke 1,2,3 den Frequenzverlauf der Größe $\Phi_{\mu}^{11^1}/\Phi_{\min}^{11^1}$, $\mu=1,2,3$ für $p=j\omega$ im interessierenden Bereich der Pole und Nullstellen; dabei ist

$$\Phi_{\omega}^{11^1} = \sum_{\mu=1}^L \left(\frac{\partial(\{11^1\})}{\partial L_{\mu}} L_{\mu} \right)^2 + \sum_{\nu=1}^C \left(\frac{\partial(\{11^1\})}{\partial C_{\nu}} C_{\nu} \right)^2.$$

$\Phi_{\min}^{11^1}$ errechnet sich nach Gl.(2.15) mit Hilfe der Gln.(2.58a,b) unter den Nebenbedingungen des empfindlichkeitsoptimalen Falles und ist für die drei Netzwerke 1,2,3 gleich, da die Zahl der Induktivitäten und Kapazitäten pro Netzwerk übereinstimmt. Wie man der Abbildung entnimmt, besitzt Netzwerk 2 bei $\omega=4.2$ eine um den Faktor 2.6 schlechtere Gesamtempfindlichkeit als Netzwerk 1. Das rührt daher, daß bei Netzwerk 1 die Empfindlichkeiten von $\{11^1\}$ bezüglich der Induktivitäten und Kapazitäten jeweils von gleicher Größenordnung sind, während bei Netzwerk 2 die Empfindlichkeit von $\{11^1\}$ bezüglich C_3 um einen Faktor 145 größer ist als die entsprechende Empfindlichkeit bezüglich C_2 .

Solche Unterschiede in der Gesamtempfindlichkeit bei äquivalenten Netzwerken mit gleichem Aufwand nehmen mit höherem Grad und damit zunehmender Zahl an Elementen noch zu, da der Spielraum für die Gesamtempfindlichkeit zwischen den Extremwerten $\Phi_{\max}^{11^1}$ und $\Phi_{\min}^{11^1}$ wächst.

Von der Topologie eines Reaktanzzweipols und den Elementewerten läßt sich ohne Rechnung nichts über die Gesamtempfindlichkeit an einem beliebigen Frequenzpunkt aussagen, wohl aber wenn das Empfindlichkeitsverhalten in der Umgebung einer Nullstelle oder eines Pols interessiert. Hier lassen sich unabhängig von der speziellen Funktion günstige Strukturen angeben, was jetzt anhand der Netzwerke von Bild 26 erläutert wird.

Bei Netzwerk 1 wird die Lage der Pole von $\{11^1\}$ für $p \neq 0$, $p \neq \infty$ jeweils durch einen LC-Parallelkreis festgelegt. Nur je eine Induktivität und Kapazität bestimmen die Lage eines Pols $p_0 = j\omega_0$. Das bedeutet, daß die Größe der anderen Elemente an der Stelle p_0 auf die Größe von $\{11^1\}$ keinen Einfluß besitzt, weshalb an Polstellen von $\{11^1\}$ für Netzwerk 1 der Quotient $\Phi_{\mu}^{11^1}/\Phi_{\min}^{11^1}$ den maximal möglichen Wert aufweist, wie Bild 27 zeigt.

Im Gegensatz dazu ist an den entsprechenden Polstellen für Netz-

werk 2 der Quotient $\Phi_4^{11^2}/\Phi_{min}^{11^2}$ nur wenig größer als Eins, da hier alle Elemente des Netzwerks an der Bildung der Polstelle beteiligt sind. Das gleiche gilt für Netzwerk 3, eine Cauersche Kettenschaltung. Was für Pole geschildert wurde, trifft analog für Nullstellen zu. Nur ist hier Netzwerk 1 der zweiten Realisierung aus den obigen Gründen vorzuziehen.

Die Vorteile von LC- Serien- oder Parallelkreisen in Reaktanzzweipolen liegen in der leichten Abgleichbarkeit der betreffenden Pol- oder Nullstellen. Leichte Abgleichbarkeit widerspricht aber geringer Gesamtempfindlichkeit der Netzwerkfunktion in der Umgebung der Abgleichfrequenz. Nach Foster realisierte Reaktanzzweipole (Netzwerk 1,2) haben hier deshalb die theoretisch schlechteste Gesamtempfindlichkeit. Cauersche Kettenschaltungen (Netzwerk 3) weisen dagegen im Bereich der Pol- und Nullstellen ein wesentlich gleichmäßigeres Empfindlichkeitsverhalten auf, wie Bild 27 zeigt.

Da die Imaginärteile der Empfindlichkeiten von $\mathcal{Z}$ bezüglich der Elemente bei Reaktanzzweipolen stets das gleiche Vorzeichen besitzen, wird sich mit steigendem Elementeaufwand das Empfindlichkeitsverhalten eines Netzwerks im Durchschnitt verbessern, weil sich die Einzelempfindlichkeiten verringern. Realisierungen mit einigen redundanten Elementen werden demnach im allgemeinen eine geringere Gesamtempfindlichkeit besitzen als äquivalente kanonische Netzwerke. Sie besitzen zudem den Vorteil, daß durch die jetzt begrenzt veränderbaren Elementewerte das Empfindlichkeitsverhalten an einem bestimmten Frequenzpunkt optimiert werden kann. Im obigen Beispiel unterscheidet sich Netzwerk 4 von Netzwerk 1 topologisch nur durch eine zusätzliche Kapazität. Dadurch wird vor allem die Gesamtempfindlichkeit in der Umgebung der Pole der Impedanzfunktion verbessert (Bild 28), da in Netzwerk 4 jetzt alle Elemente bei diesen Frequenzen eine von Null verschiedene Empfindlichkeit besitzen. Das Maximum für $\Phi_4^{11^2}/\Phi_{min}^{11^2}$ von Netzwerk 4 bei $\omega=1.53$ wird durch die Resonanzfrequenz des durch L_2, C_2 gebildeten Parallelkreises verursacht. Eine hohe Gesamtempfindlichkeit ist hier zu erwarten, da dann trivialerweise $S_{\mathcal{Z}_4}^{11^2} = S_{\mathcal{Z}_4}^{11^2} = S_{C_2}^{11^2} = 0$ gilt. Ein Vergleich mit Bild 27 zeigt jedoch, daß selbst

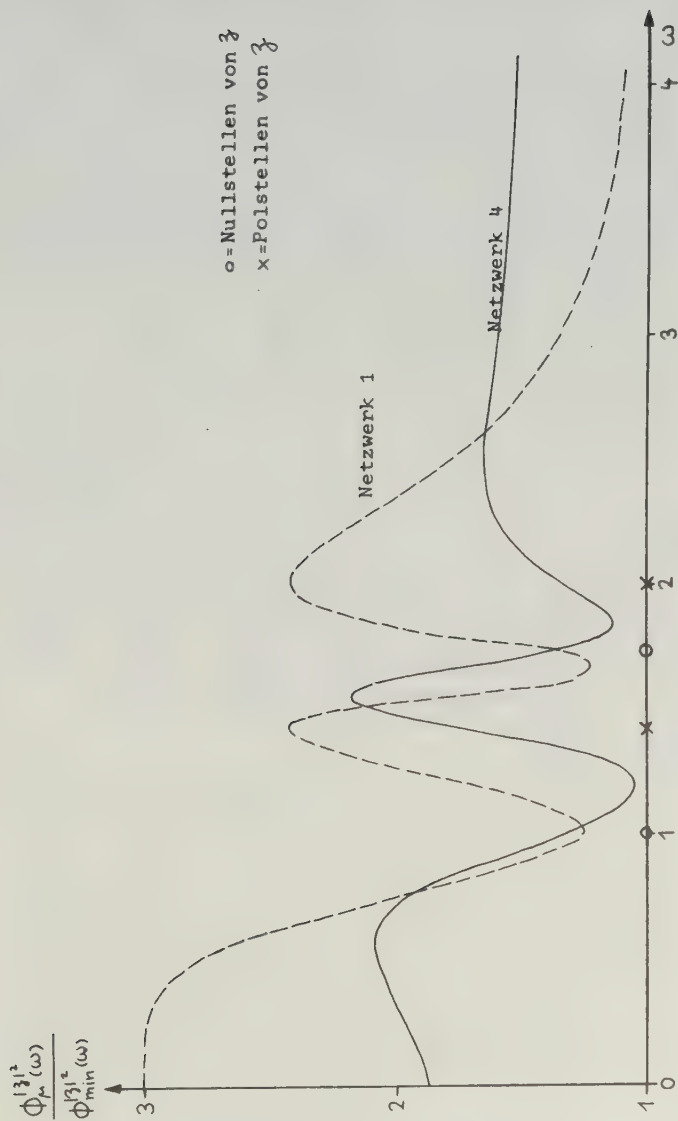


Bild 28: Vergleich der Gesamtempfindlichkeit von Netzwerk 1 und 4 aus Bild 26, bezogen auf die minimale Gesamtempfindlichkeit von Netzwerk 1.

gegenüber dem redundanten Netzwerk 4 die Cauersche Kettenschaltung (Netzwerk 3) im Bereich der Pole und Nullstellen und bei kleinen Frequenzen im Mittel die geringste Gesamtempfindlichkeit besitzt.

Bei Kenntnis der Topologie und der Netzwerkelemente kann auch eine Vorhersage über die Gesamtempfindlichkeit der Reaktanzzweipole bei sehr kleinen oder sehr großen Frequenzen gemacht werden. Der Zweipol verhält sich dann rein kapazitiv oder induktiv. Es gelten damit die Ausführungen von Abschnitt 2.3.1 über Zweipole aus nur einer Bauelementesorte. Deren Empfindlichkeitsverhalten kann man meist ohne Rechnung abschätzen. So besitzt Netzwerk 1 für großes ω eine annähernd optimale Gesamtempfindlichkeit, da es sich für $\omega \rightarrow \infty$ zu einer Serienschaltung dreier Kapazitäten von gleicher Größenordnung vereinfacht. Das Verhalten von Netzwerk 2 wird dagegen für große ω nur von der Kapazität C_3 bestimmt, was eine entsprechend große Gesamtempfindlichkeit zur Folge hat.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß von den vielen Strukturen für Reaktanzzweipole vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus jene vorzuziehen sind, bei denen im interessierenden Frequenzbereich immer möglichst viele Elemente mit größenordnungsmäßig gleichem Einfluß die Impedanzfunktion bestimmen. Wegen der prinzipiell gleichen Vorzeichen der Imaginärteile der Empfindlichkeiten bringen dabei redundante Elemente in der Regel eine Verbesserung der integralen Gesamtempfindlichkeit mit sich.

2.5.1.2 Reaktanzzweitore

Als zweite Klasse von Netzwerken werden Reaktanzzweitore untersucht. Ausführlich wird dabei auf das Empfindlichkeitsverhalten der Reaktanzzweitore an Nullstellen der entsprechenden Übertragungsfunktion für $p=j\omega$ eingegangen. Die Reaktanzzweitore dürfen zwischen Ohmwidständen eingebettet sein und sollen durch eine ideale Spannungs- oder Stromquelle erregt werden. Auch hier werden Netzwerke mit geringer Gesamtempfindlichkeit Φ^f gesucht, was annähernd gleich große Empfindlichkeiten im interessierenden Frequenzbereich erfordert. Als Beispiele dienen Realisierungen von Übertragungsfunktionen $f=U_2/U_1$ oder $f=U_2/I_1$.

a) Das Empfindlichkeitsverhalten von Kettennetzwerken im allgemeinen und Übertragungsnullstellen

Im folgenden werden Kettennetzwerke nach Bild 29 untersucht,

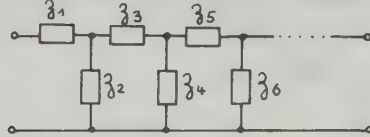


Bild 29

deren einzelne Elemente im einfachsten Fall aus folgenden Grundstrukturen bestehen (Bild 30):

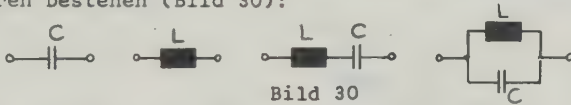


Bild 30

Die Übertragungsfunktionen $f = U_2/U_1$, $f = z_2/z_1$, $f = z_2/U_1$, $f = U_2/z_1$ solcher Kettennetzwerke können Übertragungsnullstellen nur auf der imaginären Achse einschließlich $p=0$ und $p=\infty$ besitzen [47]. Dies gilt immer, wenn die Impedanzen z_p in Bild 29 entweder Reaktanzzweipole oder Ohmwiderstände sind.

Ein Realisierungsverfahren für Netzwerke, die gemäß Bild 31 betrieben werden, findet man in [47] beschrieben.

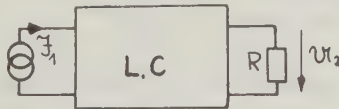


Bild 31

Die Nullstellen p_0 der zugehörigen Übertragungsfunktion

$$f = \frac{U_2}{z_1} = \frac{z_{21}}{1 + z_{22}/R} \quad (2.60)$$

werden dabei für $p_0 = j\omega_0$ mit endlichem, von Null verschiedenen ω durch eine Kapazität und eine Induktivität realisiert, was den Vorteil hat, daß jede Übertragungsnullstelle für sich getrennt abgestimmt werden kann, ohne daß andere Nullstellen beeinflusst werden. Mit steigendem Grad der Netzwerkfunktion kann anhand des zitierten Verfahrens eine wachsende Zahl von äquivalenten Netzwerken erzeugt werden, wie die vier Beispiele von Bild 32 zeigen, die verschiedene Realisierungen der Übertragungsfunktion

$$f = \frac{U_2}{z_1} = \frac{(p^2+1)(p^2+2)}{8p^5+5p^4+15p^3+8p^2+6p+2} \quad (2.61)$$

darstellen.

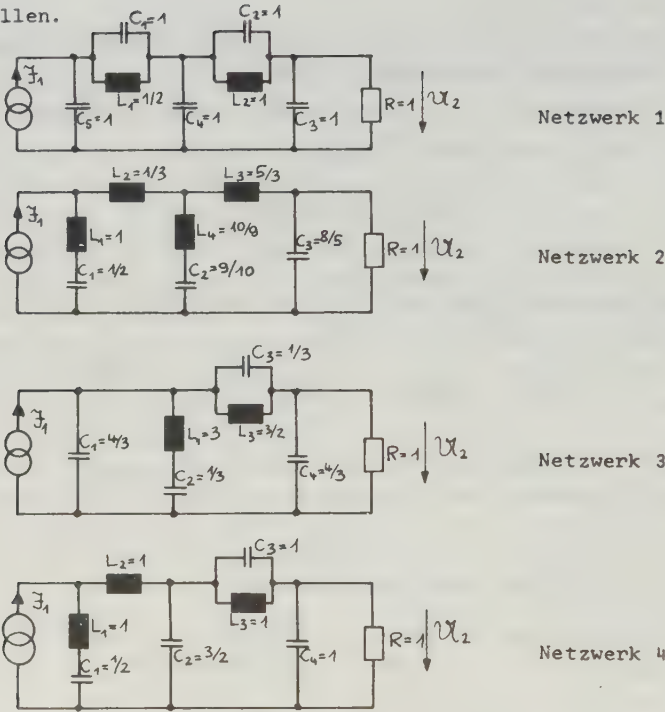


Bild 32

In Bild 33 ist der Frequenzverlauf von $|f|^2$ und der Größen $\Phi_q^{(f)^2}(\omega)/\Phi_q^{(f)^2}(\omega)_{\min}$, $q=1, \dots, 4$ für die verschiedenen Netzwerke im Intervall $0 \leq \omega \leq 1$ aufgetragen. Dabei ergibt sich mit Gl.(2.14) $\Phi_q^{(f)^2}(\omega)_{\min}$ zu

$$\Phi_q^{(f)^2}(\omega)_{\min} = \left(\frac{\partial |f|^2}{\partial R} \right)^2 + \frac{\left(\sum_{p=1}^{l_q} \frac{\partial |f|^2}{\partial L_p} L_p \right)^2}{L_q} + \frac{\left(\sum_{p=1}^{c_q} \frac{\partial |f|^2}{\partial C_p} C_p \right)^2}{c_q}, \quad (2.62)$$

wobei l_q und c_q die Gesamtzahl der Induktivitäten und Kapazitäten des jeweiligen Netzwerks bezeichnet. Die Summenempfindlichkeiten wurden an den einzelnen Frequenzpunkten jeweils numerisch ermittelt und waren für die vier Netzwerke stets gleich.

Wie man sieht, ergeben sich bezüglich der Größe $\Phi_q^{(f)^2}(\omega)/\Phi_q^{(f)^2}(\omega)_{\min}$ deutliche Unterschiede zwischen den einzelnen Netzwerken. Das gilt auch für die integrale Gesamtempfindlichkeit $\int_{0.1}^1 \Phi_q^{(f)^2}(\omega) d\omega$, deren numerisch ermittelte Werte für das Frequenzintervall $0.1 < \omega < 1$ die folgende Tabelle zeigt.

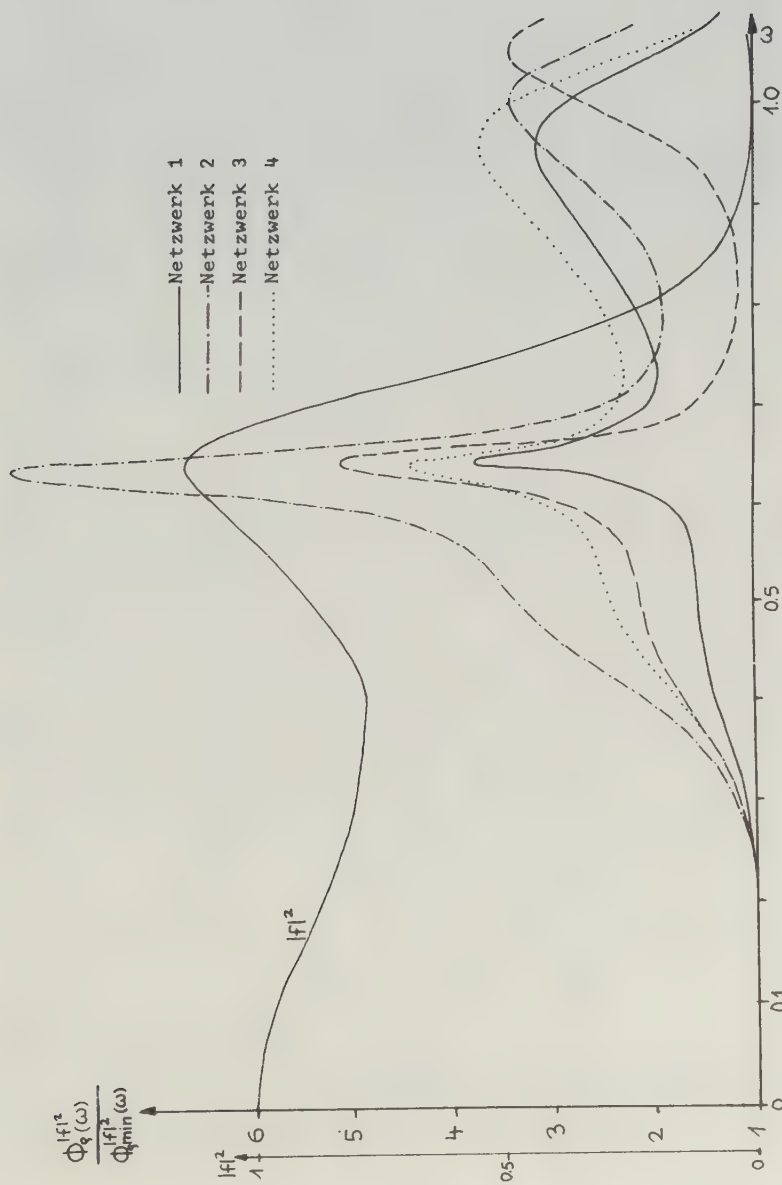


Bild 33: Frequenzverlauf der Gesamtempfindlichkeit der Netzwerke aus Bild 32, bezogen auf die theoretisch minimale Gesamtempfindlichkeit.

Netzwerk	1	2	3	4
$10^3 \int_{0.1}^1 \Phi_s^{f1^2}(\omega) d\omega$	1.74	1.94	1.24	1.80

Wie Bild 33 und speziell Bild 35 für Netzwerk 4 im Frequenzbereich $0.34 \leq \omega \leq 1.9$ zeigt, können sich im Gegensatz zu den Reaktanzzweipolen große Werte für $\Phi_s^{f1^2}/\Phi_{s_{\min}}^{f1^2}$ ergeben. Das rührt im wesentlichen daher, daß die Empfindlichkeiten der Netzwerkelemente $S_{x_{\mu}}^{f1^2}$ bei Reaktanzzweitoren im Gegensatz zu den Imaginärteilen der Empfindlichkeiten $S_{x_{\mu}}^{f2}$ von Reaktanzzweipolen verschiedenes Vorzeichen besitzen können. Bild 34 illustriert das anhand des Frequenzverlaufs der Empfindlichkeiten von $|f|^2$ bezüglich der Kapazitäten von Netzwerk 4 im Intervall $0.1 < \omega < 1$.

Bei allen vier Netzwerken von Bild 32 werden die Übertragungsnullstellen durch jeweils ein LC-Glied festgelegt. Um das Empfindlichkeitsverhalten solcher Kettennetzwerke in der Umgebung von Übertragungsnullstellen diskutieren zu können, empfiehlt es sich, die Empfindlichkeiten $S_{x_{\mu}}^f$ und nicht $S_{x_{\mu}}^{f1^2}$ zu verwenden, da im zweiten Fall für jede Realisierung an der Übertragungsnullstelle Φ^{f1^2} verschwindet. Die Realisierung der Übertragungsnullstellen, die als einfach vorausgesetzt werden (der Fall mehrfacher Übertragungsnullstellen läßt sich anhand der Empfindlichkeiten $S_{x_{\mu}}^f$ nicht mehr diskutieren, da an solchen Nullstellen neben $S_{x_{\mu}}^{f1^2}(p_0)$ auch sämtliche Empfindlichkeiten $S_{x_{\mu}}^f(p_0)$ verschwinden), geschieht durch LC- Parallel- oder Serienkreise, je nachdem es sich um Längs- oder Querimpedanzen handelt. Sei nun die Nullstelle $p_0 = j\omega_0$ durch die Elemente L_{μ} , C_{μ} erzeugt. Faßt man die übrigen Übertragungsnullstellen in einem Polynom $R(p)$ zusammen, dann läßt sich der Zähler $Z(p)$ der Übertragungsfunktion in der Form

$$Z(p) = R(p)(p^2 L_{\mu} C_{\mu} + 1) \quad (2.63)$$

schreiben. Für die Empfindlichkeiten $S_{x_q}^f$ an der Stelle $p_0 = j\omega_0$ der Übertragungsfunktion $f = Z/N$ gilt dann:

$$S_{x_q/p=p_0}^f = \frac{\partial f}{\partial x_q} x_q = \frac{\partial Z}{\partial x_q} \frac{x_q}{N} \Big|_{p=p_0} \quad (2.64)$$

Da der Ausdruck $(p^2 L_{\mu} C_{\mu} + 1)$ als Faktor im Zähler erscheint, sind an der Stelle $p=p_0$ nur die Empfindlichkeiten von f bezüglich L_{μ} und C_{μ} von Null verschieden und es gilt somit

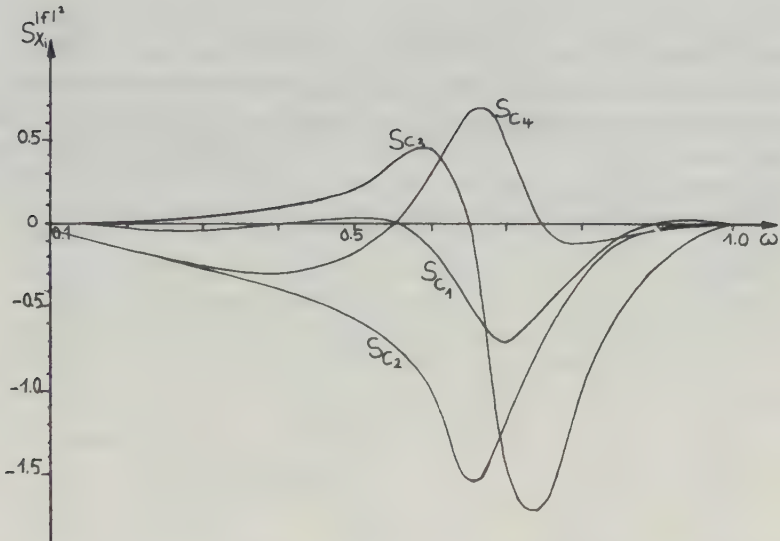


Bild 34: Empfindlichkeiten der Kapazitäten von Netzwerk 4 im Frequenzbereich $0.1 \leq \omega \leq 1$.

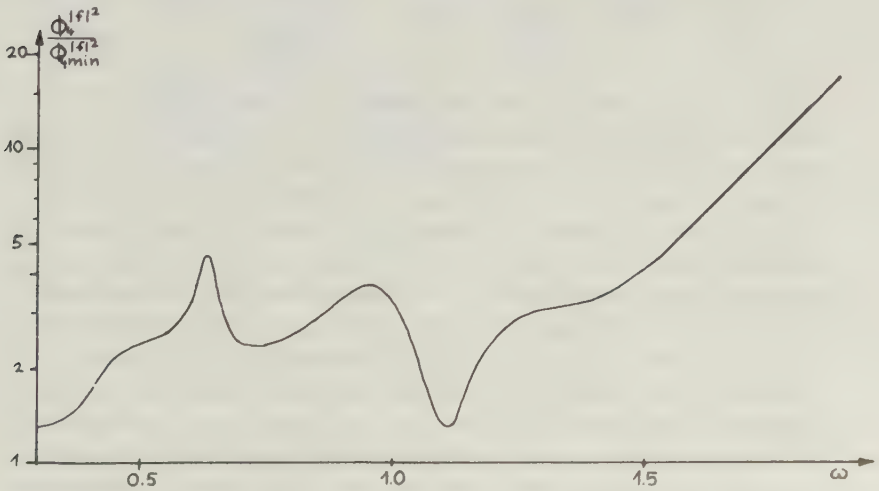


Bild 35: $\Phi^{|\dot{f}|^2} / \Phi_{min}^{|\dot{f}|^2}$ für Netzwerk 4 im logarithmischen Maßstab

$$S_{L_p}^{f/p=p_0} = S_{C_p}^{f/p=p_0} = \frac{R(p_0)}{N(p_0)} p_0^2 L_p C_p = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial p} p /_{p=p_0} . \quad (2.65)$$

Sämtliche bezüglich einer Übertragungsfunktion f äquivalenten Kettennetzwerke, die nach dem oben genannten Verfahren [47] realisiert wurden, besitzen damit an Übertragungsnullstellen auf der imaginären Achse die gleiche Gesamtempfindlichkeit Φ^f . Die Funktionen $\Phi^f(\omega)$ schneiden sich normalerweise an diesen Punkten.

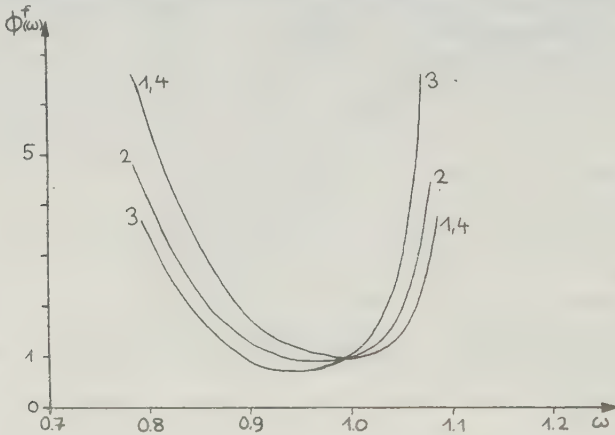


Bild 36

Bild 36 zeigt für die vier äquivalenten Netzwerke von Bild 32 den Verlauf von $\Phi^f(\omega)$ in der Umgebung von $\omega=1$. Wählt man je zwei Netzwerke aus, so zeigt die graphische Darstellung, daß die Realisierung mit geringerer Gesamtempfindlichkeit vor der Übertragungsnullstelle danach ein größeres Φ^f aufweist. Der Unterschied zwischen Netzwerk 1 und 4 liegt innerhalb der Zeichengenauigkeit. Aber auch hier schneiden sich die Kurven bei $\omega=1$. Es wird also unter Kettennetzwerken, die nach dem obigen Verfahren realisiert wurden, in der Regel keines sein, das gegenüber den anderen äquivalenten Realisierungen für beliebiges $p=j\omega$ stets eine geringere Gesamtempfindlichkeit besitzt. Es ist jedoch nicht gelungen auszuschließen, daß sich die Funktionen $\Phi^f(\omega)$ an Übertragungsnullstellen nur berühren und damit von zwei äquivalenten Netzwerken das eine vor und nach der Nullstelle die geringere Gesamtempfind-

lichkeit hat. Bei keinem der gerechneten Beispiele wurde jedoch dieser Fall beobachtet (siehe dazu auch Abschnitt 4.3.2).

b) Empfindlichkeitsverhalten von Kettennetzwerken bei redundanter Realisierung

Durch Ausnutzen der Freiheitsgrade des in [47] beschriebenen Verfahrens zur Realisierung von Netzwerken gemäß Bild 31 können redundante Realisierungen gefunden werden (wie etwa Netzwerk 2 in Bild 37), deren Empfindlichkeitsverhalten jetzt untersucht werden soll. Dazu werden zunächst die beiden Netzwerke von Bild 37 betrachtet, die bezüglich der Übertragungsfunktion

$$f = \frac{U_2}{I_1} = \frac{p^2 + 1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1} \quad (2.66)$$

äquivalent sind.

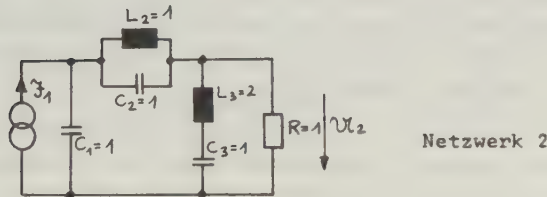
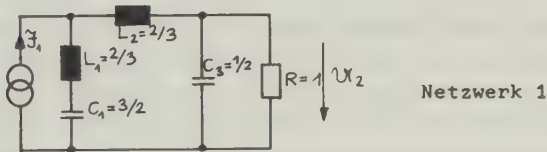


Bild 37

In algebraischer Form lauten die Übertragungsfunktionen von Netzwerk 1 und 2:

$$f_1 = \frac{(p^2 L_1 C_1 + 1) R}{p^3 C_1 C_3 R (L_1 + L_3) + p^2 C_1 (L_1 + L_2) + p R (C_1 + C_3) + 1}, \quad (2.67)$$

$$f_2 = \frac{(p^2 L_3 C_3 + 1)(p^2 L_2 C_2 + 1) R}{a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \quad (2.68)$$

mit $a_5 = C_1 C_2 C_3 L_1 L_2 R$, $a_4 = L_2 L_3 C_3 (C_1 + C_2)$, $a_3 = R (L_2 (C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3) + L_3 C_1 C_3)$, $a_2 = L_2 (C_1 + C_2) + L_3 C_3$, $a_1 = R (C_1 + C_3)$, $a_0 = 1$.

Die Übertragungsfunktion von Netzwerk 2 ist algebraisch vom fünften Grad. Mit den speziellen Werten für die Netzwerkelemente ergibt sich:

$$f = \frac{(1+2p^2)(1+p^2)}{(p^3+2p^2+2p+1)(1+2p^2)} \quad (2.69)$$

Nenner und Zähler enthalten den Faktor $(1 + 2p^2)$. Vergleicht man die Gesamtempfindlichkeit der beiden Netzwerke, so beobachtet man in der Umgebung der Stelle $p = \pm j\sqrt{2}/2$ einen sehr großen Unterschied, wie die folgende Tabelle zeigt.

ω	$\Phi_1 f ^2$	$\Phi_2 f ^2$
0.5	0.64	1.41
0.6	0.74	5.04
0.7	0.70	792.0
0.8	0.42	2.2
0.9	4.10	0.15

Die Überaus große Empfindlichkeit von Netzwerk 2 erklärt sich dadurch, daß bei jeder noch so kleinen Änderung eines Netzwerkelementewerts sich der Faktor $(1+2p^2)$ nicht mehr herauskürzt.

Dadurch entsteht ein nahe zusammenliegendes Pol- und Nullstellenpaar der Übertragungsfunktion bei $p \approx \pm j\sqrt{2}/2$, was eine sehr starke Änderung von f und damit große Beträge der Empfindlichkeiten von f bzw. $|f|^2$ bezüglich der Netzwerkelemente zur Folge hat. Dieser Effekt ist noch in größerer Umgebung von $p = \pm j\sqrt{2}/2$ bemerkbar, wie die Tabelle zeigt.

Was hier am speziellen Beispiel geschildert wurde, gilt allgemein. Jedes Netzwerk, dessen zugehörige Übertragungsfunktion in algebraischer Form einen höheren Grad aufweist als die entsprechende numerische Form (Zähler und Nenner also gemeinsame Faktoren $A_i(p)$ aufweisen, wird an Nullstellen von $A_i(p)$ nahe bei oder auf der imaginären Achse äußerst empfindlich gegen Parameterschwankungen sein. Die geringste Änderung eines Elementewerts bewirkt dann eine sehr große Änderung der Übertragungsfunktion. Solche Netzwerke sind daher vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus unbedingt zu vermeiden. Befindet sich aber eine Nullstelle von $A_i(p)$ auf der negativ reellen Achse der Frequenzebene, wie das beim Doppel-T RC-Glied der Fall ist (siehe Abschnitt 2.5.2.2), so wird für $p=j\omega$ das Empfindlichkeitsverhalten nicht beeinflusst.

c) Andere Realisierung von Übertragungsnullstellen und zugehörige Empfindlichkeit

Die Übertragungsnullstellen der vier Netzwerke in Bild 32 wurden durch jeweils ein LC-Glied bestimmt. Die Netzwerke besitzen daher an diesen Stellen eine relativ große Gesamtempfindlichkeit. Da die Vorzeichen der Empfindlichkeiten $S_{x_p}^{f|f|^2}$ jedoch verschieden sein können, existieren für diese Klasse von Netzwerken Realisierungen, deren Gesamtempfindlichkeit an Übertragungsnullstellen erheblich schlechter ist als in den obigen Beispielen. Zur Verdeutlichung dienen die beiden Netzwerke von Bild 38, die die Übertragungsfunktion

$$f = \frac{U_2}{U_1} = H \frac{(p^2 + 1)}{6p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 3p + 1} \quad (2.70)$$

realisieren.

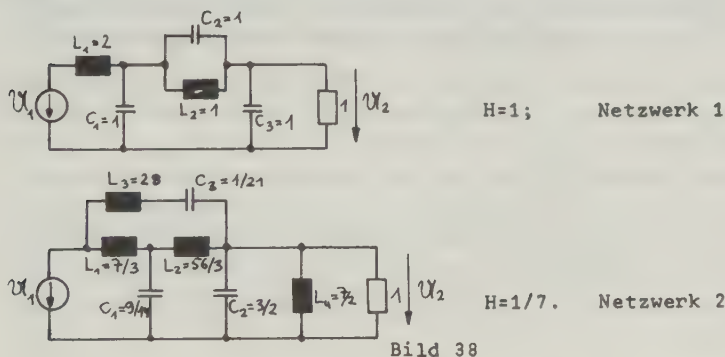


Bild 38

Um einen Vergleich der beiden Netzwerke an der Übertragungsnullstelle $\omega_0=1$ vornehmen zu können, muß $f = U_2/U_1$ als Netzwerkfunktion untersucht werden, da bei Verwendung von $|f|^2$ die Empfindlichkeiten an der Stelle $\omega_0=1$ wegen Gl.(1.7) verschwinden. Die Tatsache, daß die beiden Netzwerke die Gl.(2.70) mit verschiedenen konstanten Faktoren realisieren, wurde beim Vergleich berücksichtigt, indem die Empfindlichkeiten von Netzwerk 2 mit dem Faktor 7 multipliziert wurden. Man erhält dann an der Stelle $\omega_0=1$

$$\Phi_1^f(1) = 1, \quad \Phi_2^f(1) = 28.$$

Dieser enorme Unterschied erklärt sich, wenn man die Einzelempfindlichkeiten bzw. die dazu proportionalen Größen

$\tilde{S}_{x_p}^f = (j-1)S_{x_p}^f / p_{x_j}$ betrachtet. Es ergibt sich dann für $p=j$:

Netzwerk 1

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{L_1}^f &= 0 \\ \tilde{S}_{L_2}^f &= 1 \\ \tilde{S}_{C_1}^f &= 0 \\ \tilde{S}_{C_2}^f &= 1 \\ \tilde{S}_{C_3}^f &= 0\end{aligned}$$

$$\sum_i \tilde{S}_{L_i}^f = 1,$$

$$\sum_i \tilde{S}_{C_i}^f = 1,$$

Netzwerk 2

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{L_1}^f &= 11/3 \\ \tilde{S}_{L_2}^f &= 4/3 \\ \tilde{S}_{L_3}^f &= -12/3 \\ \tilde{S}_{C_1}^f &= -3 \\ \tilde{S}_{C_2}^f &= +4 \\ \tilde{S}_{L_4}^f = \tilde{S}_{C_2}^f &= 0\end{aligned}$$

$$\sum_i \tilde{S}_{L_i}^f = 1;$$

$$\sum_i \tilde{S}_{C_i}^f = 1.$$

Die Summenempfindlichkeiten stimmen bei beiden Netzwerken überein, die Summanden bei Netzwerk 2 sind aber betragsgroß bei entgegengesetztem Vorzeichen, was sich bei der Summation der quadrierten Beträge auswirkt. Eine größere Zahl an Elementen bedeutet hier also nicht unbedingt eine kleinere Gesamtempfindlichkeit.

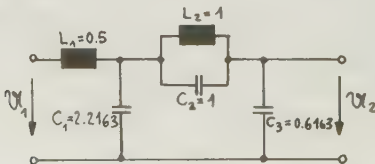
Netzwerk 2 in Bild 38 stellt ein Beispiel für eine weitere Realisierungsmöglichkeit von Übertragungsnullstellen dar. Entsprechende Netzwerke können nach einem Verfahren von E.A. Guillemin gewonnen werden [47]. Daß sich mit derartigen Netzwerken auch eine beachtliche Verringerung der Gesamtempfindlichkeit an Übertragungsnullstellen (auf der imaginären Achse) erzielen läßt, zeigt das folgende Beispiel (Bild 39). Verglichen werden zwei sekundär unbelastete Reaktanzweitore, die bezüglich der Übertragungsfunktion

$$f = U_2 / U_1 = -y_{21} / y_{22} \quad (2.74)$$

äquivalent sind und hier die Übertragungsfunktion

$$f = \frac{U_2}{U_1} = \frac{p^2 + 1}{2.1 p^4 + 3.033 p^2 + 1} \quad (2.75)$$

realisieren.



Netzwerk 1

Bild 39a

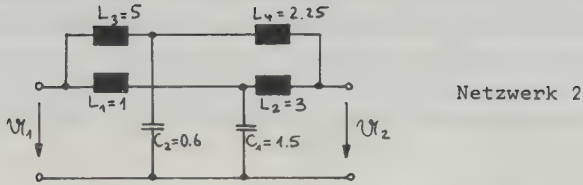


Bild 39b

An der Übertragungsnullstelle $\omega=1$ erhält man:

Netzwerk 1		Netzwerk 2	
$S_{L1}^f = 0$		$S_{L1}^f = -14/3$	
$S_{L2}^f = -15$	$\sum_i S_{L_i}^f = -15;$	$S_{L2}^f = -2$	$\sum_i S_{L_i}^f = -15;$
$S_{C1}^f = 0$		$S_{L3}^f = -7/3$	
$S_{C2}^f = -15$	$\sum_i S_{C_i}^f = -15;$	$S_{L4}^f = S_{C1}^f = -6$	$\sum_i S_{C_i}^f = -15.$
		$S_{C2}^f = -9$	
$\Phi_4^f(1) = 450.$		$\Phi_2^f(1) = 184.$	

Sämtliche Elemente von Netzwerk 2 sind an der Bildung der Nullstelle beteiligt; außerdem besitzen alle Empfindlichkeiten das gleiche Vorzeichen und sind von gleicher Größenordnung. Dies bedingt eine Gesamtempfindlichkeit Φ_2^f von nur $0.41\Phi_4^f$. Das ist ein sehr gutes Resultat, da der theoretisch minimale Wert von Φ_2^f sich als $0.375\Phi_4^f$ errechnet.

Zu bemerken wäre noch, daß die schlechte Gesamtempfindlichkeit von Netzwerk 2 aus Bild 38 an der Übertragungsnullstelle darauf zurückzuführen ist, daß Zähler und Nenner der entsprechenden Übertragungsfunktion im Gegensatz zu Netzwerk 2 aus Bild 39 einen gemeinsamen Faktor enthalten, der eine Nullstelle auf der imaginären Achse bei $p = \pm j0.865$ aufweist, wodurch in der Umgebung dieses Punktes das Empfindlichkeitsverhalten der realisierten Funktion nachteilig beeinflusst wird.

Zusammenfassend stellt man fest, daß trotz der Schwierigkeiten allgemeingültige Eigenschaften von Empfindlichkeiten zu finden, im Fall von Übertragungsnullstellen für $p=j\omega$ bei Reaktanzzwei-

toren einige relevante Aussagen möglich sind. Hervorzuheben ist vor allem die Tatsache, daß Realisierungen mit einem Mehraufwand an Elementen wegen der Möglichkeit redundanter Faktoren im Zähler und Nenner der betreffenden Übertragungsfunktion gegenüber anderen äquivalenten Netzwerken mit weniger Elementen ein erheblich schlechteres Empfindlichkeitsverhalten aufweisen können.

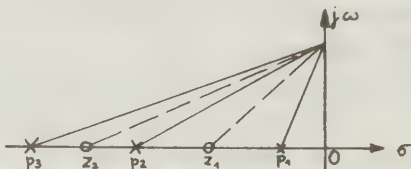
2.5.2 RC-Netzwerke

Wegen der großen Bedeutung passiver RC-Netzwerke bei der Synthese aktiver Schaltungen lohnt es sich, auch die Empfindlichkeitseigenschaften dieser Klasse von Netzwerken zu untersuchen. RC-Netzwerke unterscheiden sich wesentlich von den eben betrachteten Reaktanznetzwerken durch die Lage der Pole und Nullstellen der betreffenden Netzwerkfunktionen. Es wird sich zeigen, daß sich dadurch auch das Empfindlichkeitsverhalten ändert.

2.5.2.1 RC-Zweipole

Die Pole und Nullstellen der Impedanzfunktion $Z(p)$ eines RC-Zweipols liegen sämtlich auf der negativ reellen Achse der Frequenzebene. Im Gegensatz zu den Reaktanzzweipolen ist deshalb für Frequenzen $p=j\omega$ nur eine geringe Frequenzselektivität zu erreichen. Wie man Bild 40 entnehmen kann, wird $|Z(j\omega)|^2$ für wachsendes $\omega > 0$ eine monoton fallende Funktion von ω sein, da sich Pole und Nullstellen auf der negativ reellen Achse abwechseln und dem Nullpunkt am nächsten eine Polstelle liegt*).

Bild 40



$Z(j\omega)$ ist eine komplexwertige Funktion, die Empfindlichkeiten $S_{x_p}^Z$, $x_p = R_p, C_p$ sind deshalb ebenfalls komplex. Eine allgemeine Aussage über die Vorzeichen von $\operatorname{Re} S_{x_p}^Z$ bzw. $\operatorname{Im} S_{x_p}^Z$ analog zu Satz 2 ist hier leider nicht möglich. Trotzdem ergeben sich einige allgemeine Gesichtspunkte zur Synthese von RC-Zweipolen im Hinblick auf geringe Gesamtempfindlichkeit. Diese werden im folgenden an-

*) Für jedes Pol-Nullstellenpaar p_p, z_p gilt nämlich mit $f = \frac{p - z_p}{p - p_p}$ und $p = j\omega$: $\frac{\partial |f|^2}{\partial \omega} = \frac{2\omega(p_p^2 - z_p^2)}{(\omega^2 + p_p^2)} < 0$ wegen $z_p^2 > p_p^2$, $\omega > 0$.

hand von Beispielen zusammengestellt und verschiedene Realisierungen bezüglich ihrer Gesamtempfindlichkeit $\Phi^{1/2}$ verglichen.

Für das theoretisch mögliche Minimum von $\Phi^{1/2}$ ergibt sich zunächst allgemein mit den Gln.(1.32,33):

$$\sum_{r=1}^x S_{R_r}^{1/2} = 2|z|^2 + \frac{\partial |z|^2}{\partial \omega} \omega, \quad (2.76)$$

$$\sum_{\mu=1}^e S_{C_\mu}^{1/2} = \frac{\partial |z|^2}{\partial \omega} \omega. \quad (2.77)$$

Hieraus folgt

$$\Phi_{\min}^{1/2} = \frac{\left(\frac{\partial |z|^2}{\partial \omega} \omega\right)^2}{c} + \frac{(2|z|^2 + \frac{\partial |z|^2}{\partial \omega} \omega)^2}{r}. \quad (2.78)$$

Als Beispiel wird nun die Impedanzfunktion

$$z(p) = \frac{2p^2 + 6p + 3}{6p^2 + 6p + 1} \quad p = j\omega \quad (2.79)$$

betrachtet. Bild 41 zeigt fünf äquivalente kanonische Realisierungen dieser Impedanz.

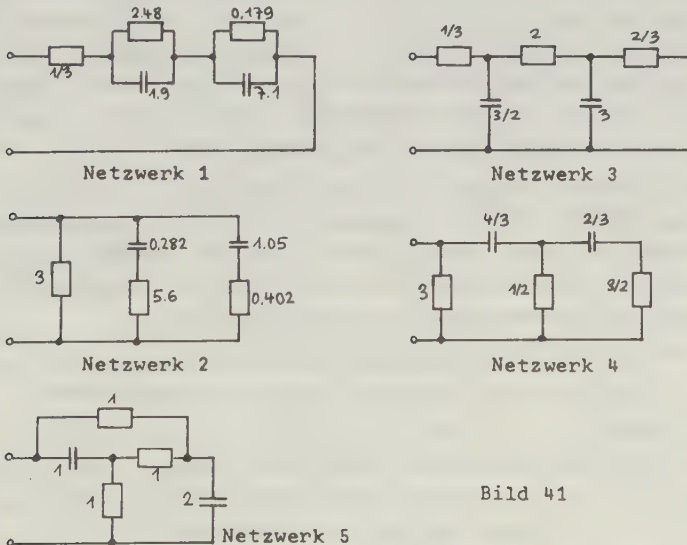


Bild 41

Bild 42 zeigt den Frequenzverlauf von $|z(j\omega)|^2$, während in Bild 43 die entsprechenden Verläufe für die Funktionen $\Phi^{1/2}/\Phi_{\min}^{1/2}$ dargestellt sind.

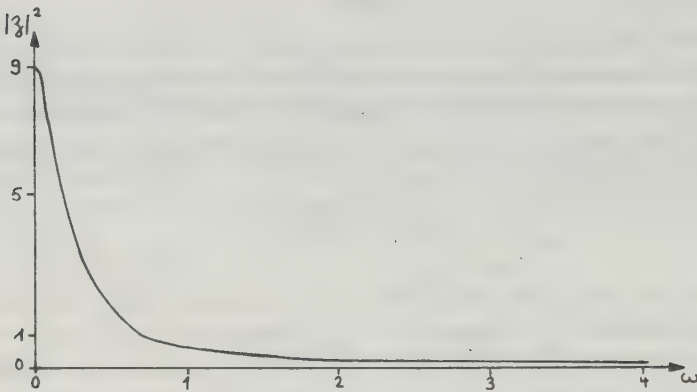


Bild 42

Die ersten vier Netzwerke stellen die kanonischen Grundschaltungen dar. Der qualitative Verlauf von deren Gesamtempfindlichkeit bzw. von $\Phi^{II}/\Phi_{min}^{II}$ läßt sich bereits ohne Rechnung aus den Netzwerken ablesen, da sich für $p \rightarrow 0$ und $p \rightarrow \infty$ die Netzwerke wie reine Ohmwidestände verhalten. So werden Netzwerk 1 und 3 bei $p \rightarrow 0$ eine günstige Gesamtempfindlichkeit aufweisen, da hier drei Ohmwidestände den Gesamtwiderstand bilden, während umgekehrt bei $p \rightarrow \infty$ Netzwerk 2 oder 4 vorzuziehen ist.

Was für dieses Beispiel gilt, kann verallgemeinert werden. Zunächst verhält sich die Impedanzfunktion eines jeden RC-Zweipols für $p \rightarrow 0$ bzw. $p \rightarrow \infty$ rein kapazitiv oder rein ohmsch. Ausgehend von dieser Tatsache müssen vom Empfindlichkeitsstandpunkt zwei Klassen von RC-Zweipolen unterschieden werden.

a) RC-Zweipole, deren Impedanz sich sowohl bei $p \rightarrow 0$ als auch bei $p \rightarrow \infty$ entweder rein kapazitiv oder rein ohmsch verhält.

Bei Beschränkung auf die vier kanonischen Grundstrukturen können dann bei beiden Grenzfrequenzen nicht jeweils alle Kapazitäten oder alle Ohmwidestände die Netzwerkfunktion beeinflussen. Das obige Beispiel macht das deutlich. Bei diesen Realisierungen ist daher eine geringe Gesamtempfindlichkeit bei $p \rightarrow 0$ mit einer schlechten Gesamtempfindlichkeit bei $p \rightarrow \infty$ verknüpft oder umgekehrt. Wegen des monotonen Verlaufs von $|Z(j\omega)|^2$ ist auch ein weitgehend ruhiger Verlauf von $\Phi^{II}/\Phi_{min}^{II}$ zwischen den Frequenzen $p=0$

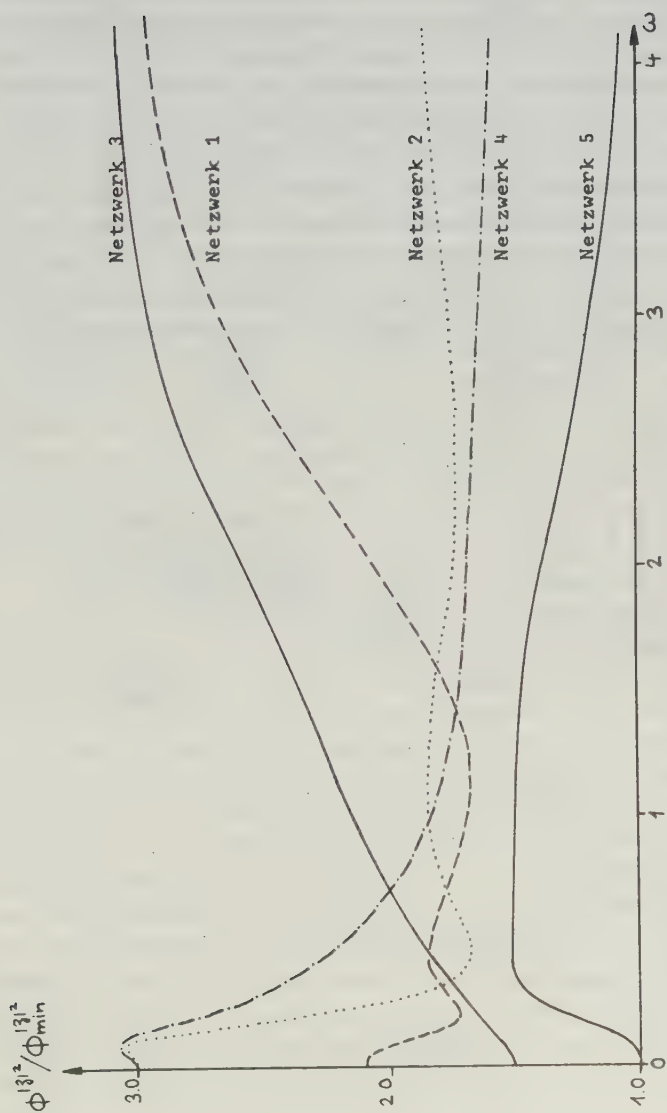


Bild 43: Frequenzverlauf von $\Phi^{13^2}/\Phi_{min}^{13^2}$ für die fünf RC-Zweipole aus Bild 41.

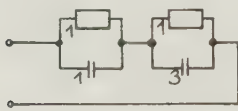
und $p \rightarrow \infty$ zu erwarten. Um sowohl bei $p \rightarrow 0$, als auch bei $p \rightarrow \infty$ geringe Gesamtempfindlichkeit zu erhalten, muß man andere Strukturen verwenden. Netzwerk 5 in Bild 41 ist hierfür ein Beispiel. Die Realisierung ist bei $p \rightarrow 0$ und $p \rightarrow \infty$ empfindlichkeitsoptimal, während dazwischen ein sehr flaches Maximum von $\Phi^{11}/\Phi_{\min}^{11}$ liegt. Bild 43 zeigt außerdem, daß dieses Netzwerk darüber hinaus bei sämtlichen Frequenzen eine geringere Gesamtempfindlichkeit aufweist als die vier kanonischen Grundstrukturen, obwohl jedes Netzwerk die gleiche Anzahl an Elementen enthält.

b) RC-Zweipole, deren Impedanz sich bei $p \rightarrow 0$ rein ohmsch, bei $p \rightarrow \infty$ rein kapazitiv verhält oder umgekehrt.

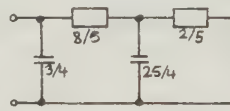
Für diese Klasse von RC-Zweipolen sei zunächst ein einfaches Beispiel gebracht. Realisiert wird die Impedanzfunktion

$$Z(p) = \frac{4p+2}{3p^2+4p+1}, \quad p=j\omega. \quad (2.80)$$

Bild 44 zeigt zwei Realisierungen, während in Bild 45 die zugehörigen Funktionen $\Phi^{11}/\Phi_{\min}^{11}$ aufgetragen sind.



Netzwerk 1



Netzwerk 2

Bild 44

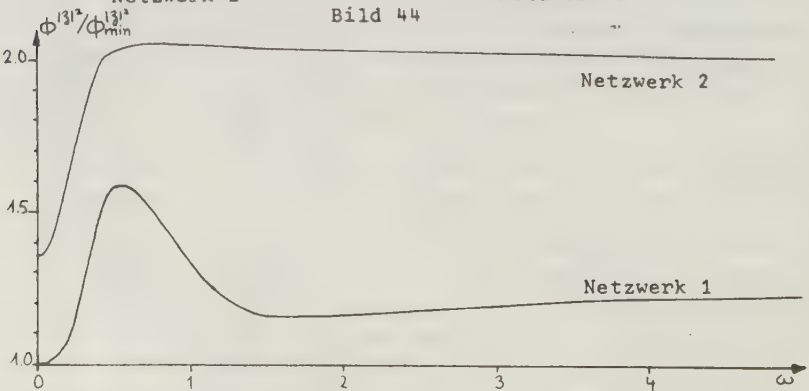


Bild 45



Bild 46

Realisierung 1 besitzt im gesamten Frequenzbereich eine geringere Gesamtempfindlichkeit als Realisierung 2. Offensichtlich ist für die hier betrachtete Klasse von RC-Zweipolfunktionen die entsprechende der beiden Strukturen von Bild 46 (je nachdem $\mathcal{Z}(0)$ unendlich oder endlich) den anderen kanonischen Grundstrukturen vorzuziehen, da sowohl bei $p \rightarrow 0$, als auch bei $p \rightarrow \infty$ jeweils alle Ohmwidestände bzw. alle Kapazitäten eine von Null verschiedene Empfindlichkeit gleichen Vorzeichens besitzen. Wie man sofort einsieht, ist dann dieses Netzwerk den anderen drei Grundschaltungen für jede beliebige RC-Zweipolfunktion vom Typ b) an zumindest einer Grenzfrequenz im Empfindlichkeitsverhalten überlegen, während bei der zweiten Grenzfrequenz die Gesamtempfindlichkeit von der gleichen Größenordnung ist wie bei den anderen Realisierungen.

Für die Empfindlichkeiten der Impedanzfunktionen von RC-Zweipolen bezüglich der Netzwerkelemente existieren Vorzeichenbeschränkungen nur an den Stellen $p=0$ und $p \rightarrow \infty$. Hier sind die Netzwerke in Zweipole aus nur einer Elementesorte entartet, für die Satz 1 gilt. Es läßt sich dann bei gegebener Impedanzfunktion eine obere Schranke $\Phi_{\max}^{(1)1}$ angeben. Bei endlichen, von Null verschiedenen Frequenzen ist dagegen $\Phi^{(1)1}/\Phi_{\min}^{(1)1}$ nach oben über die Gln.(1.63a,c) beschränkt. (Dabei ist zu beachten, daß für RC-Zweipolfunktionen für $p=j\omega$ die Größen T_R , T_C eindeutig festgelegt sind, wie Gl.(1.57) zeigt.) Die gerechneten Beispiele ergaben, daß im gesamten Frequenzbereich die Extremalwerte $\Phi_{\max}^{(1)1}(p=0)$ bzw. $\Phi_{\max}^{(1)1}(p \rightarrow \infty)$ nicht oder nur geringfügig überschritten wurden.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß man das Empfindlichkeitsverhalten von RC-Zweipolen im wesentlichen anhand der Realisierung durch Betrachtung der Grenzfälle $p \rightarrow 0$ und $p \rightarrow \infty$ abschätzt

zen kann. Wegen des zumeist ruhigen Frequenzverlaufs von $\Phi^{1/2}/\Phi_{\min}^{1/2}$ läßt sich hier im Gegensatz zu den Reaktanzzweipolen (siehe etwa Bild 27) leichter eine Realisierung finden, die im interessierenden Frequenzbereich ein besseres Empfindlichkeitsverhalten besitzt als andere äquivalente Netzwerke.

2.5.2.2 RC-Zweitore

Diese Klasse von Netzwerken soll speziell im Hinblick auf ihre Bedeutung bei der Synthese aktiver RC-Netzwerke untersucht werden. Besonders wichtig sind dabei Doppel-T Glieder bzw. überbrückte T-Glieder, auf die im folgenden eingegangen wird.

a) Ein Doppel-T Glied

Im folgenden wird die Netzwerkstruktur von Bild 47 untersucht.

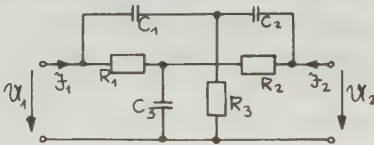


Bild 47

Es wird zunächst die Spannungsübertragungsfunktion bei unbelastetem Ausgang betrachtet. Es gilt dann

$$f = \frac{U_2}{U_1} = \frac{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0} = \frac{Z}{N}, \quad (2.81)$$

wobei $a_3 = b_3 = R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3, \quad (2.82a)$

$$b_2 = R_3 (R_1 C_3 (C_1 + C_2) + (R_1 + R_2) C_1 C_2) + R_1 R_2 C_2 C_3, \quad (2.82b)$$

$$b_1 = R_3 (C_1 + C_2) + R_2 C_2 + R_1 (C_2 + C_3), \quad (2.82c)$$

$$a_2 = R_3 C_1 C_2 (R_1 + R_2), \quad (2.82d)$$

$$a_1 = R_3 (C_1 + C_2). \quad (2.82e)$$

Das Netzwerk ist unter anderem interessant, weil es unter bestimmten Bedingungen gelingt, Nullstellen von f auf der imaginären Achse zu erzeugen und dabei gleichzeitig den Grad von f um eins zu erniedrigen. Mit den Abkürzungen

$$C_s = C_1 C_2 / (C_1 + C_2), \quad (2.83a)$$

$$C_p = C_1 + C_2, \quad (2.83b)$$

$$R_p = R_1 R_2 / (R_1 + R_2), \quad (2.83c)$$

$$R_s = R_1 + R_2 \quad (2.83d)$$

$$\omega_n^2 = 1/R_1 R_2 C_3 C_3 \quad (2.84)$$

und der Bedingungsgleichung

$$R_p C_3 = R_3 C_p \quad (2.95)$$

vereinfacht sich Gl.(2.81) zu

$$f = \frac{p^2 + \omega_n^2}{p^2 + \frac{\omega_n}{q_n} p + \omega_n^2}, \quad (2.86)$$

wobei
$$\frac{\omega_n}{q_n} = \frac{1}{R_1 C_3} + \frac{1}{R_3 C_1}. \quad (2.87)$$

Wie man sieht, sind bei gegebenem ω_n, q_n durch die Gln.(2.84,87) die Elementewerte noch nicht eindeutig festgelegt. Man hat die Möglichkeit, deren Werte so zu bestimmen, daß die Gesamtempfindlichkeit von $|f(j\omega)|^2$ speziell in der Nähe der Übertragungsnullstelle minimal wird. Mit den drei Entwurfsparametern

$$0 < \lambda < 1, \quad (2.88)$$

$$\alpha > 0, \quad (2.89)$$

$$\mu > 0, \quad (2.90)$$

wobei noch zusätzlich die Gleichung

$$v = 1 - \frac{\alpha}{1/q_n - 1/(1-\lambda)\alpha} \quad \text{mit } 0 < v < 1 \quad (2.91)$$

erfüllt werden muß, ergeben sich folgende Werte:

$$R_1 = \frac{\lambda \mu}{1-\lambda}, \quad (2.92a)$$

$$R_2 = \mu, \quad (2.92b)$$

$$R_3 = \frac{(1-v)v\mu}{(1-\lambda)\alpha^2}, \quad (2.92c)$$

$$C_1 = \frac{(1-\lambda)\alpha}{\omega_n v \mu}, \quad (2.92d)$$

$$C_2 = \frac{C_1 v}{1-v}, \quad (2.92e)$$

$$C_3 = \frac{1}{\mu \alpha \lambda \omega_n}. \quad (2.92f)$$

Möglichst kleine Gesamtempfindlichkeit an der Stelle $\omega = \omega_n$ bedeutet, daß die Empfindlichkeiten von f bezüglich der Widerstände und Kapazitäten jeweils gleich groß sein sollen. Wegen $Z(j\omega_n) = 0$ erkennt man aus Gl.(2.81) zusammen mit den Gln.(2.82a,d,e), daß $S_{R_1}^f(j\omega_n) = S_{R_2}^f(j\omega_n)$, wenn $R_1 = R_2$ und $S_{C_1}^f(j\omega_n) = S_{C_2}^f(j\omega_n)$ gilt für

$C_1 = C_2$. Außerdem erkennt man, daß bei keiner Wahl der Elemente die Gleichheit aller Empfindlichkeiten einer Elementesorte bei $R = j\omega_m$ zu erreichen ist.

Aus $R_1 = R_2$ folgt $\lambda = 1/2$, aus $C_1 = C_2$ folgt $\nu = 1/2$, so daß der Parameter α bei gegebenem ω_0 , q_n wegen Gl.(2.91) festgelegt ist. Die noch wählbare Größe μ hat aber auf die Empfindlichkeiten keinen Einfluß, wie man den Gln.(2.82a-e) zusammen mit den Gln.(2.92a-f) entnimmt. R_1, R_2, R_3 ist nämlich proportional zu μ , während C_1, C_2, C_3 proportional zu $1/\mu$ ist. Da in den Koeffizienten a_i, b_i und den entsprechenden Koeffizientenempfindlichkeiten $S_{x_k}^{a_i, b_i}$ nur Terme der Form $(R_\tau C_\sigma)^{\delta}$, $\sigma, \tau, \delta = 1, 2, 3$ auftreten, spielt die Größe von μ für die Empfindlichkeiten keine Rolle.

Das symmetrische T-Glied besitzt damit unter den möglichen Realisierungen an der Übertragungsnullstelle die geringste Gesamtempfindlichkeit. Das folgende Beispiel zeigt, daß eine unsymmetrische Realisierung auch an anderen Frequenzpunkten immer eine größere Gesamtempfindlichkeit besitzt. Betrachtet wird die Funktion

$$f = \frac{U_2}{U_1} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 4p + 1}, \quad p = j\omega. \quad (2.93)$$

Zwei bezüglich f äquivalente Realisierungen zeigt Bild 48.

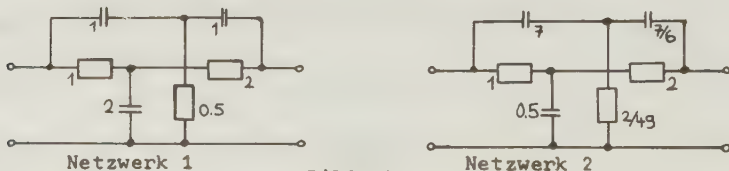


Bild 48

In Bild 49 ist der Verlauf von $\Phi^{1/2} / \Phi_{min}^{1/2}$ für die beiden Netzwerke dargestellt. Man sieht zunächst, daß durch die Unsymmetrie bzw. durch die gegenüber Netzwerk 1 größeren Unterschiede in den Bauelementewerten sich die Gesamtempfindlichkeit von Netzwerk 2 bei allen Frequenzen erhöht. Außerdem ist bemerkenswert, daß das symmetrische T-Glied an der Übertragungsnullstelle fast die theoretisch minimale Gesamtempfindlichkeit besitzt. Auch bei den übrigen Frequenzen ergibt sich ein gutes Empfindlichkeitsverhalten.

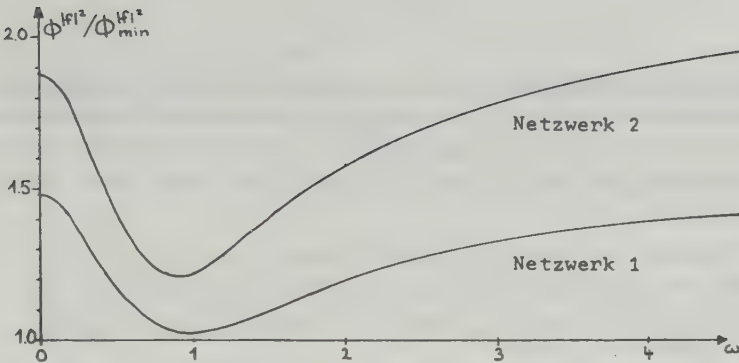


Bild 49

Das hier betrachtete symmetrische T-Glied realisiert als RC-Netzwerk die Übertragungsnullstelle einer Funktion von der Art Gl.(2.86) nahezu empfindlichkeitsoptimal und nützt so die von der Struktur her gegebenen Möglichkeiten zur Empfindlichkeitsoptimierung voll aus. Absolut genommen besitzt jedoch das einfache RLC-Netzwerk in Bild 50, das ebenfalls eine Realisierung der Übertragungsfunktion Gl.(2.86) darstellt, an der Übertragungsnullstelle eine noch geringere Gesamtempfindlichkeit. An hand der Summengleichungen Gln.(1.32,33) für die Empfindlich-

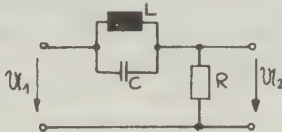


Bild 50

keiten läßt sich das zeigen. Für das RC-Netzwerk gilt:

$$\sum_{p=1}^3 S_{R_p}^{|f|^2} = \sum_{p=1}^2 S_{C_p}^{|f|^2} = \frac{\partial |f|^2}{\partial \omega} \omega \quad (2.94)$$

Daraus folgt mit Gl.(2.15)

$$\Phi_{\min}^{|f|^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial |f|^2}{\partial \omega} \omega \right)^2, \quad \omega \text{ beliebig.} \quad (2.95)$$

Für das RLC-Netzwerk aus Bild 50 erhält man

$$f = U_2/U_1 = \frac{p^2 LC + 1}{p^2 LC + p \frac{L}{R} + 1}, \quad p = j\omega. \quad (2.96)$$

Hieraus folgt $S_R^{|f|^2}(\omega_n) = 0$, so daß in der Umgebung der Übertragungsnullstelle $p_n = j\omega_n$ gilt:

$$\Phi^{|f|^2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial |f|^2}{\partial \omega} \omega \right)^2 / \omega = \omega_n. \quad (2.97)$$

Das Doppel-T Glied besitzt also bei sechs Elementen im praktisch nicht erreichbaren Idealfall in einer Umgebung der Übertragungsnullstelle immer noch eine größere Gesamtempfindlichkeit als die entsprechende RLC-Realisierung von Bild 50 mit der halben Zahl an Elementen.

Im folgenden soll noch, da für Anwendungen wichtig, die Übertragungsfunktion $y_{21} = \mathcal{F}_2 / \mathcal{U}_1 (u_1=0)$ des Doppel-T Gliedes von Bild 47 untersucht werden. Der allgemeine Ausdruck für diese Übertragungsfunktion lautet

$$-y_{21}(p) = \frac{1}{pR_1C_3R_2 + R_1 + R_2} + \frac{p^2 R_3 C_1 C_2}{pR_3(C_1 + C_2) + 1}. \quad (2.98)$$

Aus Gl.(2.98) entnimmt man, daß für $R_1 = R_2$ und $C_1 = C_2$ bei beliebigem $p=j\omega$ $S_{R_1}^{y_{21}} = S_{R_2}^{y_{21}}$ und $S_{C_1}^{y_{21}} = S_{C_2}^{y_{21}}$ gilt. Der optimale Fall für die Empfindlichkeiten ist damit bereits erreicht, da $S_{R_3}^{y_{21}}$ bzw. $S_{C_3}^{y_{21}}$ prinzipiell einen anderen Frequenzverlauf als $S_{R_1}^{y_{21}}$ bzw. $S_{C_1}^{y_{21}}$ besitzen.

Für Netzwerk 1 aus Bild 48 ergibt sich

$$-y_{21}(p) = \frac{1}{2} \frac{p^2 + 1}{p + 1}.$$

In Bild 51 ist der entsprechende Verlauf von $\phi^{y_{21}} / \phi_{min}^{y_{21}}$ für $p=j\omega$ aufgetragen. Man sieht, auch bezüglich $|y_{21}(j\omega)|^2$ besitzt die Realisierung in einer größeren Umgebung der Übertragungsnullstelle eine nahezu optimale Gesamtempfindlichkeit.

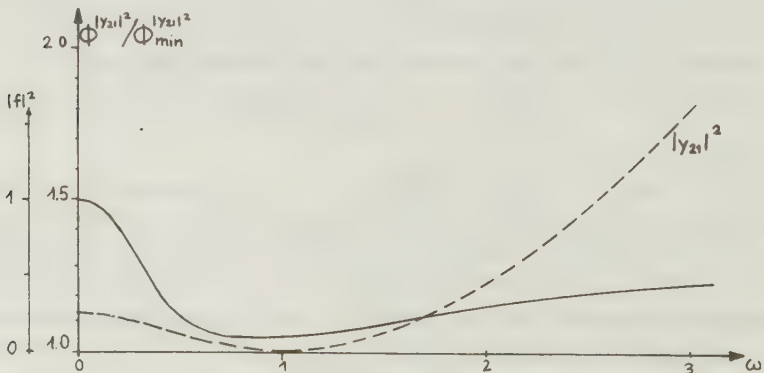


Bild 51

b) Überbrückte T-Glieder

Im folgenden wird das überbrückte T-Glied von Bild 52 untersucht.

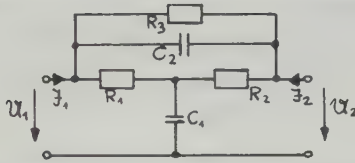


Bild 52

Das Empfindlichkeitsverhalten von $|f(j\omega)|^2 = |U_2/U_1|^2$ bzw. die Größe $\Phi^{|\mathbf{f}|^2}/\Phi_{\min}^{|\mathbf{f}|^2}$ zu betrachten ist aus folgendem Grund problematisch.

Der Ausdruck $\Phi^{|\mathbf{f}|^2}/\Phi_{\min}^{|\mathbf{f}|^2}$ gibt normalerweise an, inwieweit das untersuchte Netzwerk in bezug auf seine Gesamtempfindlichkeit das theoretisch mögliche Minimum nach Gl.(2.15) erreicht und erlaubt damit auch eine Aussage, wie gut die betreffende Netzwerkstruktur zur Realisierung der betrachteten Netzwerkfunktion vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus geeignet ist. Das ist aber nur dann sinnvoll, wenn $\Phi_{\min}^{|\mathbf{f}|^2}$ wenigstens annähernd auch praktisch realisiert werden kann.

Für das überbrückte T-Glied gilt nun, falls die Elemente in Bild 52 von Null verschieden sind:

$$f(p) = U_2/U_1 = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{a_1 p^2 + b_1 p + a_0}, \quad a_2, a_1, a_0, b_1 > 0; \quad a_1 < b_1.$$

An der Stelle $p_0 = j\omega_0 = j\sqrt{a_0/a_2}$ ist ferner $|f(j\omega_0)|^2 = a_1^2/b_1^2 \neq 0$ sowie $\partial|f|^2/\partial\omega = 0/\omega = \omega_0$. Wegen $a_1 = R_1 C_1 R_2 + R_3 C_2 (R_1 + R_2)$ und $b_1 = a_1 + R_1 C_1 R_3$ sind die Empfindlichkeiten $S_{x_n}^{|\mathbf{f}|^2}(\omega_0)$ bezüglich aller Netzwerkelemente von Null verschieden. Andererseits ist aber wegen der Gln.(1.32,33) $\Phi_{\min}^{|\mathbf{f}|^2}(\omega_0) = 0$ (siehe auch Gl.(2.95)), so daß der Ausdruck $\Phi^{|\mathbf{f}|^2}/\Phi_{\min}^{|\mathbf{f}|^2}$ für $\omega \rightarrow \omega_0$ gegen unendlich strebt und damit keine sinnvolle Aussage mehr liefert. (Bei der Spannungsübertragungsfunktion des Doppel-T Gliedes ist mit $\partial|f|^2/\partial\omega = 0$ auch $|f|^2 = 0$. Wie sich zeigen läßt, bleibt dann der Quotient $\Phi^{|\mathbf{f}|^2}/\Phi_{\min}^{|\mathbf{f}|^2}$ endlich und sinnvoll).

Betrachtet man dagegen die dimensionsbehaftete Übertragungsfunktion $y_{21}(j\omega) = I_2/U_1/U_{10}$ des überbrückten T-Gliedes, so tritt dieser kritische Fall nicht auf, da dann die rechte Seite der Gl.(1.29) und damit $\Phi_{\min}^{|\mathbf{y}_{21}|^2}$ an der Stelle $\partial|y_{21}|^2/\partial\omega = 0, \omega \neq 0$ von Null ver-

schieden ist. Für das überbrückte T-Glied aus Bild 52 ergibt sich zunächst allgemein

$$-y_{21}(p) = \frac{1}{pR_1R_2C_1 + R_1 + R_2} + \frac{1}{R_2} + pC_2. \quad (2.99)$$

Es lassen sich also Übertragungsfunktionen vom Typ

$$-y_{21}(p) = \frac{\alpha p^2 + \beta p + \gamma}{p + \delta} \quad (2.100)$$

realisieren, wobei die Werte für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht beliebig vorgegeben werden können, sondern dadurch eingeschränkt sind, daß sich positive Netzwerkelemente ergeben müssen (siehe die Gln. (2.101)). Da Gl. (2.100) nur vier Parameter enthält, das Netzwerk aber fünf Elemente, wird untersucht inwieweit das Empfindlichkeitsverhalten von y_{21} durch passende Wahl der Elementewerte optimiert werden kann. Bei gegebenen Werten für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ergeben sich mit den Gln. (2.99, 100) folgende Ausdrücke für die Netzwerkelemente:

$$C_2 = \alpha, \quad (2.101a)$$

$$R_3 = \frac{1}{\beta - \alpha\delta}, \quad (2.101b)$$

$$C_1 \geq 4A/\delta^2, \quad (2.101c)$$

$$R_2 = (\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4A/C_1})/2A, \quad (2.101d)$$

$$R_1 = \frac{\delta}{A} - R_2, \quad (2.101e)$$

wobei

$$A = \gamma - \delta(\beta - \alpha\delta). \quad (2.102)$$

Die Gln. (2.101a, b) zeigen, daß bei gegebener Netzwerkfunktion zunächst die Werte von C_2 und R_3 festgelegt sind. Außerdem ersieht man aus Gl. (2.99), daß mit R_3 und C_2 auch die betreffenden Empfindlichkeiten bestimmt sind. Dagegen lassen sich durch Variation von C_1 die Werte von R_1 und R_2 beeinflussen. Wegen

$$R_1 + R_2 = \delta/A \quad (2.103)$$

und

$$R_1C_1R_2 = 1/A \quad (2.104)$$

ist andererseits $S_{C_1}^{y_{21}}(j\omega)$ und wegen Gl. (2.11) auch $S_{C_1}^{y_{21}^2}(\omega)$ festgelegt. Es können daher nur noch $S_{R_1}^{y_{21}}(j\omega)$ und $S_{R_2}^{y_{21}}(j\omega)$ bzw. $S_{R_1}^{y_{21}^2}(\omega)$, $S_{R_2}^{y_{21}^2}(\omega)$ beeinflußt werden. Der optimale Fall tritt ein, wenn $R_1 = R_2$, da dann $S_{R_1}^{y_{21}^2}(\omega) = S_{R_2}^{y_{21}^2}(\omega)$.

Als Beispiel werden zwei bezüglich der Funktion

$$-y_{21} = \frac{p^2 + 2.5p + 3}{p + 2} \quad (2.105)$$

Äquivalente Netzwerke untersucht (Bild 53).

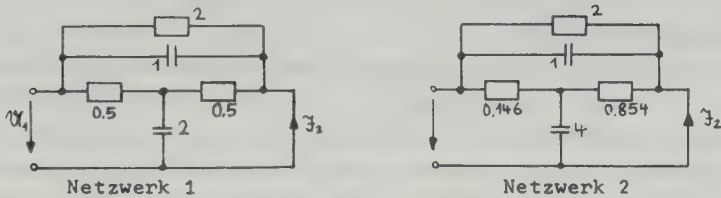


Bild 53

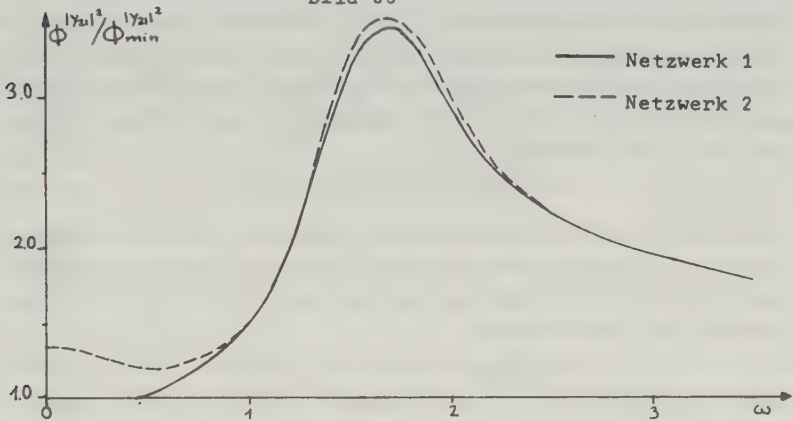


Bild 54

Bild 54 zeigt den Verlauf der entsprechenden Kurven für $\Phi^{|y_{21}|^2} / \Phi_{\min}^{|y_{21}|^2}$. Es ergeben sich nennenswerte Unterschiede zwischen den beiden Netzwerken lediglich bei $p \rightarrow 0$, was zu erwarten ist, da sich das Netzwerk hier rein ohmsch verhält und sich eine Unsymmetrie in R_1 und R_2 am stärksten auswirkt. Insgesamt zeigt sich, daß beim überbrückten T-Glied die Gesamtempfindlichkeit von $|y_{21}|^2$ weitgehend von der Wahl der Bauelementewerte unabhängig ist und die Werte für $\Phi^{|y_{21}|^2} / \Phi_{\min}^{|y_{21}|^2}$ nicht besonders günstig ausfallen.

2.6 Toleranzoptimierung

2.6.1 Problemstellung

In den letzten Abschnitten wurde als Maß für die Gesamtempfindlichkeit einer reellen Netzwerkfunktion f die Größe Φ^f (Gl.(2.6)) verwendet. Nach Gl.(2.5) ist Φ^f proportional zur Dispersion von f unter der Annahme, daß alle Elemente dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung und die gleiche Toleranz besitzen. Diese vereinfachende Annahme erleichtert die grundlegenden Erörterungen wesentlich, trifft aber im allgemeinen nicht zu. Für praktische Untersuchungen der Empfindlichkeit einer reellen Netzwerkgröße f gegenüber Parameteränderungen empfiehlt es sich daher, gemäß Gl.(2.5) die Dispersion σ_f^2

$$\sigma_f^2 \approx \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_\mu} \right)^2 \sigma_{x_\mu}^2 = \sum_{\mu=1}^n (S_{x_\mu}^f)^2 t_\mu^2 \quad (2.106)$$

zu verwenden. Diese Größe enthält neben den Empfindlichkeiten $S_{x_\mu}^f$ auch die Toleranzparameter t_μ der Bauelemente. Da im folgenden eine Rechteckverteilung zugrunde gelegt wird (siehe Bild 14), so besteht der Zusammenhang

$$\sigma_{x_\mu} = \frac{\alpha_\mu}{100\sqrt{3}} |x_\mu| = t_\mu |x_\mu|, \quad \mu=1, \dots, n, \quad (2.107)$$

wobei α_μ die Toleranz des μ -ten Bauelements in Prozent angibt. Wie aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannt, ergibt der Ausdruck Gl.(2.106) die Dispersion von f genähert, wenn sich alle Parameter innerhalb ihrer Toleranzgrenzen gleichzeitig und unabhängig voneinander statistisch ändern. Die Dispersion σ_f^2 ist frequenzabhängig. Meist interessiert das Empfindlichkeitsverhalten (bzw. Toleranzverhalten) einer reellen Netzwerkfunktion $f(\omega)$ (z.B. der Dämpfungsverlauf eines Filters) nicht nur an einem Frequenzpunkt, sondern in einem ganzen Frequenzintervall (Bild 55).

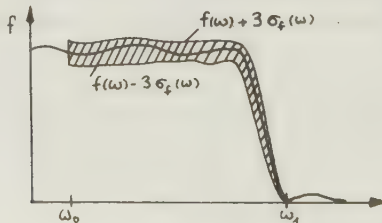


Bild 55

Dann liegt (unter der Annahme einer Gaußverteilung für f) mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.73% der Verlauf von f in dem schraffierten Gebiet, dessen Grenzen durch $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + 3 \sigma_f(\omega)$ bzw. $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - 3 \sigma_f(\omega)$ bestimmt sind. Die Querstriche bedeuten dabei, daß in der Funktion f für die Parameter x_i deren Sollwerte einzusetzen sind.

Je besser das Empfindlichkeits- bzw. Toleranzverhalten eines Netzwerks ist, um so geringer wird die schraffierte Fläche

$$\tilde{F} = 6 \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sigma_f(\omega) d\omega \quad (2.108)$$

sein. F wird klein, wenn $\sigma_f(\omega)$ und damit auch $\sigma_{f_i}^2(\omega)$ klein wird. An und für sich könnte Gl.(2.108) als Maß für eine Empfindlichkeits- bzw. Toleranzoptimierung verwendet werden. Daß im folgenden die Größe

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sigma_f^2(\omega) d\omega \approx \sum_{i=1}^n t_i^2 \int_{\omega_0}^{\omega_1} (\sigma_{f_i}^2(\omega)) d\omega = F \quad (2.109)$$

benutzt wird, liegt daran, daß bei Verwendung von Gl.(2.109) diejenigen Realisierungen bevorzugt werden, bei denen ein gleichmäßiger Verlauf von σ_f im betrachteten Frequenzintervall vorliegt. Außerdem läßt sich nur mit Gl.(2.109) als Kriterium eine geschlossene Lösung für das jetzt zu behandelnde Problem finden. In den Gln.(2.108,109) werden die Beiträge der Empfindlichkeiten im ganzen Frequenzbereich gleichmäßig bewertet. Sollen einige Frequenzpunkte besonders hervorgehoben werden, empfiehlt es sich, als Kriterium Gl.(2.110) mit einer entsprechenden Gewichtsfunktion $\varphi(\omega) > 0$ zu verwenden.

$$F = \sum_{i=1}^n t_i^2 \int_{\omega_0}^{\omega_1} (\sigma_{f_i}^2(\omega)) \varphi(\omega) d\omega. \quad (2.110)$$

2.6.2 Ermittlung eines optimalen Toleranzsatzes

Die Ermittlung von optimalen Toleranzsätzen für die Bauelemente elektrischer Netzwerke unter Nebenbedingungen stellt eine für die Praxis wichtige Frage dar [37,38,40,54,55]. In diesem Abschnitt wird das Problem behandelt, zu einer vorgegebenen Realisierung und damit bei gegebenen Empfindlichkeiten $S_{f_i}^f$ der realisierten Netzwerkfunktion f unter Berücksichtigung von Gl.(2.109) die Toleranzparameter t_i der Bauelemente so zu bestimmen, daß die Ge-

samtkosten minimal werden.

Zunächst wird die Annahme gemacht, daß die Kosten für die einzelnen Bauelemente im umgekehrten Verhältnis zu deren Toleranzen stehen. Die Gesamtkosten P ergeben sich dann zu

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{t_i} \quad (2.111)$$

wobei die c_i Gewichtungsfaktoren sind, die unterschiedliche Preise für verschiedene Bauelementesorten berücksichtigen.*)

Als notwendige Nebenbedingung wird die integrale Toleranz der Netzwerkfunktion mit Hilfe der Größe F aus Gl.(2.109) auf einem vorgegebenen Wert gehalten. Diese Problemstellung entspricht den praktischen Gegebenheiten, wo meist neben Forderungen bezüglich des Verlaufs der Netzwerkfunktion auch Angaben über deren maximale Schwankung geliefert werden.

Die Aufgabe, P aus Gl.(2.111) zu minimieren unter der Einschränkung

$$g = \sum_{i=1}^n t_i^2 \int_{\omega_0}^{\omega_1} (S_i(\omega))^2 d\omega - F = 0 \quad (2.112)$$

läßt sich mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatortechnik geschlossen lösen. Zur Bestimmung der optimalen Toleranzparameter t_i muß die Extremalbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial t_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial t_i} = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (2.113)$$

erfüllt sein. Mit der Abkürzung

$$J_i = \int_{\omega_0}^{\omega_1} (S_i(\omega))^2 d\omega \quad (2.114)$$

ergibt sich aus den Gln.(2.111,112):

$$\frac{\partial P}{\partial t_i} = -\frac{c_i}{t_i^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial t_i} = 2t_i J_i; \quad i=1, \dots, n. \quad (2.115a,b)$$

Mit den Gln.(2.115) erhält man durch Elimination von t_i aus den Gln.(2.112,113) einen Ausdruck für λ :

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{c_i^2 J_i}}{F} \right)^{3/2}. \quad (2.116)$$

*) Zur Berechnung der Gesamtkosten wird an und für sich von dem Ansatz $P = \sum_{\mu=1}^n (c_\mu/t_\mu + d_\mu)$ ausgegangen, wobei durch die Parameter c_μ , d_μ die Kosten-Toleranzbeziehung für die Bauelemente festgelegt wird. Der konstante Term $\sum d_\mu$ spielt aber für die Berechnung der optimalen Toleranzparameter keine Rolle und wird daher weggelassen. Bei den minimalen Gesamtkosten Gl.(2.118) käme dann dieser Term wieder additiv hinzu.

Aus Gl.(2.113) läßt sich λ eliminieren, und es ergibt sich der endgültige Ausdruck für die optimalen Toleranzparameter zu:

$$t_{k \text{ opt}} = \frac{\sqrt[3]{c_k} \sqrt{F}}{\sqrt[3]{\int_{\omega_0}^{\omega_1} |S_k(\omega)|^2 d\omega} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{c_i^2 \int_{\omega_0}^{\omega_1} |S_i(\omega)|^2 d\omega}}}; \quad k=1, \dots, n. \quad (2.117)$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in Gl.(2.111) läßt sich der minimale Wert für die Gesamtkosten ermitteln. Man erhält:

$$P_{\min} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{c_i^2 \int_{\omega_0}^{\omega_1} |S_i(\omega)|^2 d\omega} \right)^{3/2}}{\sqrt{F}}. \quad (2.118)$$

2.6.3 Diskussion des Ergebnisses

a) Man sieht aus Gl.(2.117), daß die optimalen Toleranzen alle gleichmäßig über die Quadratwurzel aus F von der Gesamtterolanz der Netzwerkfunktion abhängen. Bei vierfachem F (d.h. Verdopplung der schraffierten Fläche in Bild 55) halbieren sich die Gesamtkosten.

b) Je teurer das Bauelement ist, d.h. je größer das zugehörige c_i , um so größer wird auch die zugehörige optimale Toleranz.

c) Bauelemente mit großer integraler Einflußempfindlichkeit $\int_{\omega_0}^{\omega_1} |S_i(\omega)|^2 d\omega$ erfordern entsprechend kleine Toleranzen. Wesentlich ist dabei, daß die optimalen Toleranzen nur über die dritte Wurzel von den Kostenfaktoren und integralen Empfindlichkeiten abhängen.

d) Der Ausdruck für $P_{\min}$ ist unabhängig von den expliziten Ausdrücken für die Toleranzen der Elemente. Gl.(2.118) ist daher sehr gut geeignet, um mehrere äquivalente Schaltungen bezüglich ihrer Gesamtkosten mit jeweils demselben F als Toleranzmaß zu vergleichen, ohne daß für jede Realisierung jeweils der optimale Toleranzsatz bestimmt werden muß.

Die Gln.(2.117,118) ermitteln den optimalen Toleranzsatz bzw. die minimalen Gesamtkosten für eine einzige Realisierung mit fest vorgegebenen Empfindlichkeiten. Im Kapitel 2.5 wurden verschiedene äquivalente Realisierungen einer Netzwerkfunktion verglichen; dafür blieben dort die Toleranzen unberücksichtigt. Im folgenden werden beide Probleme verknüpft und bei fest gegebenem

Toleranzmaß F verschiedene äquivalente Realisierungen mit ihren jeweiligen optimalen Toleranzsätzen im Hinblick auf minimale Gesamtkosten $P_{\min}$ untersucht. Welchen Einfluß dabei der Frequenzverlauf der Bauelementeempfindlichkeiten ausübt, soll zunächst am Beispiel von sechs Realisierungen eines Ohmwiderstands $R=1$ demonstriert werden. Obwohl das Beispiel sehr einfach gewählt wurde, lassen sich daraus allgemeine Auswahlregeln für Netzwerke mit gutem Empfindlichkeits- bzw. Toleranzverhalten ableiten. Die Kostenfaktoren $c_i=1$ und das Toleranzmaß $F=1$ seien bei allen sechs Netzwerken gleich, so daß sich die Gln.(2.117,118) vereinfachen zu

$$t_{i \text{ opt}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\int_{\omega_0}^{\omega_1} |S_i^f(\omega)|^2 d\omega} \sqrt[3]{\sum_{i=1}^n \int_{\omega_0}^{\omega_1} |S_i^f(\omega)|^2 d\omega}} \quad (2.119)$$

$$P_{\min} = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\int_{\omega_0}^{\omega_1} |S_i^f(\omega)|^2 d\omega} \right)^{3/2} \quad (2.120)$$

Für die sechs äquivalenten Realisierungen gilt jeweils

$$\sum_{i=1}^n S_{X_i}^R = \sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial R_i} R_i = 1 \quad (2.121)$$

Betrachtet wird der Frequenzbereich $0 \leq \omega \leq 1$.

Netzwerk 1:

$$S_1^R(\omega) = \text{const.} = 1$$

$$t_{1 \text{ opt}} = 1$$

$$P_{\min} = 1$$

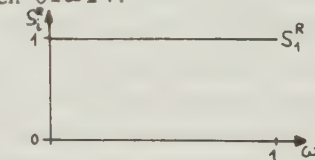
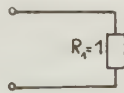


Bild 56

Netzwerk 2:

$$S_1^R(\omega) = \text{const.} = 0.1$$

$$S_2^R(\omega) = \text{const.} = 0.9$$

$$t_{1 \text{ opt}} = 4.33$$

$$t_{2 \text{ opt}} = 1.0$$

$$P_{\min} = 1.23$$

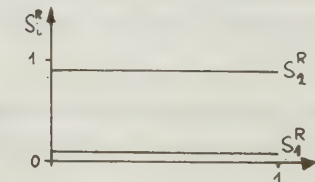
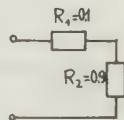


Bild 57

Netzwerk 3:

$$S_1^R(\omega) = \text{const.} = 0.5$$

$$S_2^R(\omega) = \text{const.} = 0.5$$

$$t_{1\text{opt}} = t_{2\text{opt}} = \sqrt{2}$$

$$P_{\min} = 1.41$$

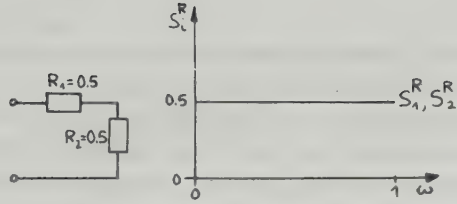


Bild 58

Netzwerk 4:

$$S_1^R(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq 0.1 \\ 0 & 0.1 < \omega \leq 1 \end{cases}$$

$$S_2^R(\omega) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega \leq 0.1 \\ 1 & 0.1 < \omega \leq 1 \end{cases}$$

$$t_{1\text{opt}} = 1.8$$

$$t_{2\text{opt}} = 0.87$$

$$P_{\min} = 1.71$$

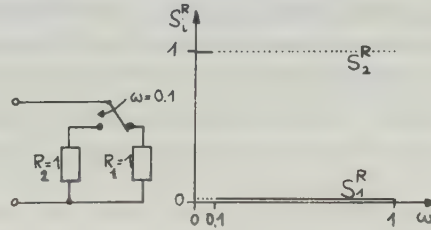


Bild 59

Netzwerk 5:

$$S_1^R(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq 0.5 \\ 0 & 0.5 < \omega \leq 1 \end{cases}$$

$$S_2^R(\omega) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega \leq 0.5 \\ 1 & 0.5 < \omega \leq 1 \end{cases}$$

$$t_{1\text{opt}} = t_{2\text{opt}} = 1.0$$

$$P_{\min} = 2.0$$

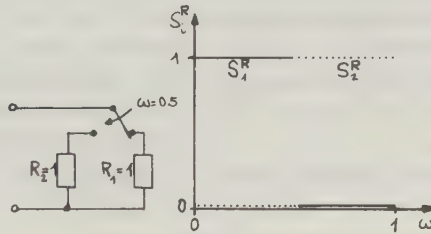


Bild 60

Netzwerk 6:

$$S_1^R(\omega) = \text{const.} = 1.5$$

$$S_2^R(\omega) = \text{const.} = -0.5$$

$$t_{1\text{opt}} = 0.55$$

$$t_{2\text{opt}} = 1.14$$

$$P_{\min} = 2.69$$

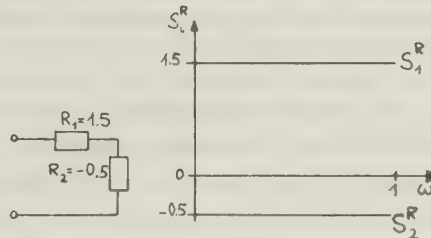


Bild 61

Diese Beispiele ergeben folgende allgemeingültige Regeln:

1. Vom Kostenstandpunkt aus sollten im betrachteten Frequenzbereich möglichst alle Bauelementeempfindlichkeiten das gleiche Vorzeichen besitzen. Die gleiche Forderung hatte sich schon bei der Minimierung von Φ^f ergeben. Leider besitzen nur bei wenigen Klassen von Netzwerken die Bauelementeempfindlichkeiten prinzipiell das gleiche Vorzeichen. Im allgemeinen werden die Vorzeichen mit der Frequenz ständig wechseln (siehe Bild 34). Beispiel sechs zeigt, daß bei verschiedenen Vorzeichen der Empfindlichkeiten selbst mit optimalen Toleranzen für die Bauelemente die Gesamtkosten der Schaltung sehr schnell anwachsen.

2. Es ist die Realisierung zu bevorzugen, bei der im wesentlichen ein Element die Gesamtempfindlichkeit der Schaltung bestimmt. (Beispiel 1). Vom Kostenstandpunkt aus ist es also nicht sinnvoll, einen ohmschen Widerstand durch zwei mit dem halben Nennwert zu ersetzen, wenn dabei das Toleranzmaß F unverändert bleiben soll (Netzwerk 3). Im Fall frequenzabhängiger Netzwerkfunktionen und damit auch frequenzabhängiger Empfindlichkeiten kann natürlich diese Forderung nicht erfüllt werden. Es bleibt aber die Tendenz vorhanden, daß vom Kostenstandpunkt aus unter der Voraussetzung Gl.(2.111) im allgemeinen kanonische Realisierungen Netzwerken mit redundanten Elementen vorzuziehen sind. Dieses Ergebnis steht im Gegensatz zur Minimierung der Gesamtempfindlichkeit Φ^f , wo deren theoretisch minimaler Wert mit zunehmender Bauelementezahl sinkt.

Wesentlich für die Gültigkeit der obigen Aussage sind allerdings annähernd gleich große Kostenfaktoren c_i . Ist der Kostenfaktor für das Element mit dominierender Empfindlichkeit im Vergleich zu den anderen Elementen groß (etwa bei aktiven RC-Netzwerken, wenn ein aktiver Parameter verglichen wird mit passiven Elementen), dann kann keine allgemeine Aussage mehr gemacht werden.

3. Günstig wirkt sich aus, wenn das Verhältnis der Einzelempfindlichkeiten untereinander im betrachteten Frequenzbereich möglichst konstant bleibt (vergleiche Netzwerk 2 mit Netzwerk 4 oder 5). Auch diese Forderung ist sehr schwer zu erfüllen, be-

sonders wenn sich die Netzwerkfunktion stark mit der Frequenz ändert.

2.6.4 Vergleich der Ergebnisse mit HAYKIN [24]

Aus Gl.(2.117) für die optimalen Toleranzparameter ergibt sich für je zwei Netzwerkelemente X_i und X_j

$$\frac{t_{i, \text{opt}} \sqrt[3]{\int_{\omega_0}^{\omega_1} |S_i^f(\omega)|^2 d\omega}}{\sqrt[3]{c_i}} = \frac{t_{j, \text{opt}} \sqrt[3]{\int_{\omega_0}^{\omega_1} |S_j^f(\omega)|^2 d\omega}}{\sqrt[3]{c_j}} ; \quad i, j=1, \dots, n. \quad (2.122)$$

Wesentlich in dieser Beziehung ist der Zusammenhang mit der dritten Wurzel aus den integralen Einzelempfindlichkeiten. HAYKIN [24] definiert den "optimalen" Bauelementetoleranzsatz dagegen durch die Relation

$$\tilde{t}_{i, \text{opt}} \int_{\omega_0}^{\omega_1} |S_i^f(\omega)| d\omega = \tilde{t}_{j, \text{opt}} \int_{\omega_0}^{\omega_1} |S_j^f(\omega)| d\omega ; \quad i, j=1, \dots, n. \quad (2.123)$$

Gl.(2.123) ist aus der anschaulichen Forderung hervorgegangen, daß jeder Parameter den gleichen integralen Einfluß auf die betrachtete Netzwerkgröße besitzt. Wie sich jedoch anhand Netzwerk 2 von Bild 57 zeigen läßt, führt die Bedingungsgl.(2.123) nicht zur optimalen Lösung.

Wegen $S_1^R(\omega) = 0.1$, $S_2^R(\omega) = 0.9$ ($0 \leq \omega \leq 1$) muß mit Gl.(2.123) gelten:

$$\tilde{t}_{1, \text{opt}} \frac{1}{10} = \tilde{t}_{2, \text{opt}} \frac{9}{10} .$$

Mit der Nebenbedingung Gl.(2.109) und $F = 1$ ergibt sich

$$\tilde{t}_{1, \text{opt}} = 7.08, \quad \tilde{t}_{2, \text{opt}} = 0.786$$

und hiermit

$$P_{\min} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{t_i} = 1.43,$$

während man mit dem optimalen Toleranzsatz nach Gl.(2.122)

$P_{\min} = 1.23$ erhält.

2.6.5 Numerische Rechnungen und diskrete Toleranzen

Die Berechnung der optimalen Toleranzparameter für ein bestimmtes Netzwerk erfordert einen hohen Aufwand, da die Integrale

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} |S_i^f(\omega)|^2 d\omega \quad i=1, \dots, n$$

numerisch ermittelt werden müssen, was die Berechnung der Em-

pfindlichkeiten an vielen Frequenzpunkten nötig macht. Zu diesem Zweck wurde von einem Analyseprogramm ausgegangen, das die Netzwerkfunktion zunächst in algebraischer Form als Quotient zweier Polynome des Parameters p aufstellt, wobei die Polynomkoeffizienten jeweils eine Summe aus entsprechenden Baumzweigadmittanzprodukten der Elemente bilden. Mit dieser Darstellung lassen sich dann die Empfindlichkeiten ebenfalls als Quotienten zweier Polynome in p ermitteln, wobei jetzt die numerischen Werte für die Bauelemente eingesetzt werden. Dieses Verfahren hat den großen Vorteil, daß nur eine einzige Analyse des Netzwerks notwendig ist und dann sehr schnell für viele Frequenzpunkte die Werte der Übertragungsfunktion und aller Empfindlichkeiten berechnet werden können. Das Programm ist in FORTRAN IV geschrieben, die Rechnungen wurden mit einer CDC 3300 Rechenanlage durchgeführt.

Im folgenden Beispiel werden die Ergebnisse dargestellt, die sich beim Vergleich der vier äquivalenten Tiefpässe von Bild 32 ergaben. Untersucht wird das Frequenzintervall $0 = \omega_0 \leq \omega \leq \omega_1 = 1$. Für alle Netzwerke wurden sämtliche Kostenfaktoren $c_i = 1$ gesetzt, sowie $F = 5 \cdot 10^{-4}$ gewählt.

Zum Vergleich wurden noch für jedes Netzwerk die Gesamtkosten unter der Annahme berechnet, daß alle Bauelemente gleich große Toleranzen besitzen. Die Größe dieser Toleranzen ergibt sich aus der Nebenbedingung $F_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ und ist ebenfalls aufgeführt.

Kostenvergleich bei gleichen Toleranzen P_{g1} , bei optimalen Toleranzen P_{opt} und bei optimalen diskreten Toleranzen $P_{od}^{*)}$.

	Netzwerk 1	Netzwerk 2	Netzwerk 3	Netzwerk 4
P_{g1}	560	592	473	569
P_{opt}	423	436	410	427
P_{od}	502	502	450	468

Toleranzen in Prozent, wenn alle Bauelemente die gleiche Toleranz besitzen würden:

Netzwerk 1	Netzwerk 2	Netzwerk 3	Netzwerk 4
2.47%	2.34%	2.57%	2.43%

*) zu den optimalen diskreten Toleranzen siehe unten.

Optimale kontinuierliche Toleranzen (1.Spalte) und optimale diskrete Toleranzen (2.Spalte) für die vier Netzwerke von Bild 32:

Netzwerk 1		Netzwerk 2		Netzwerk 3		Netzwerk 4	
$T_R=2.3\%$	2%	$T_R=2.3\%$	2%	$T_R=2.3\%$	2%	$T_R=2.3\%$	2%
$T_{C_1}=17.2\%$	10%	$T_{C_1}=5.1\%$	5%	$T_{C_1}=2.7\%$	2%	$T_{C_1}=5.1\%$	5%
$T_{C_2}=2.7\%$	2%	$T_{C_2}=1.8\%$	2%	$T_{C_2}=2.8\%$	2%	$T_{C_2}=2.6\%$	2%
$T_{C_3}=4.7\%$	5%	$T_{C_3}=3.4\%$	2%	$T_{C_3}=5.3\%$	5%	$T_{C_3}=2.7\%$	2%
$T_{C_4}=3.4\%$	2%	$T_{L_1}=12.9\%$	10%	$T_{C_4}=3.9\%$	2%	$T_{C_4}=4.7\%$	5%
$T_{C_5}=3.3\%$	2%	$T_{L_2}=10.4\%$	10%	$T_{L_1}=4.3\%$	5%	$T_{L_1}=13\%$	10%
$T_{L_1}=5.6\%$	10%	$T_{L_3}=2.1\%$	2%	$T_{L_2}=1.9\%$	2%	$T_{L_2}=5\%$	5%
$T_{L_2}=1.7\%$	2%	$T_{L_4}=2.8\%$	2%			$T_{L_3}=1.7\%$	2%

Wert von F (Gl.(2.109)) bei optimalen diskreten Toleranzen ($F \leq F_O = 5 \cdot 10^{-4}$):

Netzwerk 1	Netzwerk 2	Netzwerk 3	Netzwerk 4
$4.8 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$

Wie man sieht, bringt die optimale Wahl der Toleranzen eine wesentliche Verringerung der Kosten gegenüber gleich großen Toleranzen. Am größten ist dieser Effekt bei Netzwerk 2, da hier die optimalen Toleranzen teilweise stark vom mittleren Wert von 2.34% abweichen. Es fällt außerdem auf, daß der Unterschied in den Gesamtkosten für die Netzwerke bei gleichen Elementetoleranzen erheblich größer ist als bei der Wahl optimaler Toleranzen. Netzwerk 3 weist in beiden Fällen die geringsten Gesamtkosten auf. Entsprechend ist die mittlere Toleranz am größten. Damit erweist sich in diesem Beispiel das Netzwerk mit den wenigsten Elementen als das günstigste.

Der bisher ermittelte optimale Parametersatz ist für eine praktische Anwendung noch ungeeignet, da Bauelemente nur in diskreten Toleranzklassen (z.B. 0.5%, 1%, 2%, 5%, 10%) erhältlich sind. Ausgehend von den optimalen Toleranzen einer kontinuierlichen

Optimierung gilt es deshalb, einen Satz mit diskreten Toleranzwerten so zu finden, daß die Kostenfunktion

$$P = \sum_{i=1}^n c_i/t_i \quad (2.124)$$

für diskrete t_i minimal wird unter der quadratischen Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i t_i^2 \leq F_0 \quad (2.125)$$

mit gegebenen

$$\gamma_i = \int_{\omega_i}^{\omega_1} (S_i^f(\omega))^2 d\omega; \quad i=1, \dots, n. \quad (2.126)$$

Es ist anzunehmen, daß die "optimalen" diskreten Toleranzen in der Nachbarschaft der entsprechenden kontinuierlichen Werte liegen. Denn in einem multidimensionalen Raum mit den Toleranzen als Koordinatenachsen bildet Gl.(2.125) mit dem Gleichheitszeichen ein Ellipsoid, das von der hyperbolischen Fläche Gl.(2.124) in dem Punkt berührt wird, der den kontinuierlichen optimalen Toleranzsatz darstellt. Läßt man die Kosten P in Gl.(2.124) wachsen, so durchdringt das Hyperboloid teilweise das durch die Nebenbedingung mit dem Gleichheitszeichen fest vorgegebene Ellipsoid. Jeder Satz diskreter Toleranzen stellt einen Punkt in diesem Raum dar. Der erste dieser Punkte innerhalb des Ellipsoids, der vom Hyperboloid erreicht wird, ist der optimale diskrete Toleranzsatz.

Davon ausgehend wird folgende Strategie entwickelt: Optimale kontinuierliche Toleranzen, die um weniger als einen vorgegebenen Wert (z.B. 10%) von einem möglichen diskreten Wert abweichen, erhalten diesen sofort als diskreten Optimalwert. Außerdem werden Bauelementen, deren optimale kontinuierliche Toleranzen größer oder kleiner sind als die erlaubten größten oder kleinsten diskreten Werte, die größten bzw. kleinsten möglichen Toleranzen als diskrete Optimalwerte zugeordnet. Anschließend werden die Beiträge dieser Bauelemente aus den Gln.(2.124,125) eliminiert und eine neue reduzierte Bedingungsgleichung aufgestellt.

Die noch verbleibenden $m \leq n$ Bauelemente besitzen optimale kontinuierliche Toleranzen, die zwischen zwei diskreten Werten liegen. Die beiden letzteren werden als die möglichen Optimalwerte angenommen. Der endgültige optimale Toleranzsatz ergibt sich schließlich durch Berechnung aller 2^m Möglichkeiten für die Ge-

samtkosten unter Beachtung der Nebenbedingung Gl.(2.125). Der dazu nötige Zeitaufwand hält sich in Grenzen, da die Zielfunktion Gl.(2.124) sehr einfach ist und ihr Wert entsprechend schnell berechnet werden kann. Falls die gerade ermittelten Kosten höher liegen als beim bereits erhaltenen vorläufigen optimalen diskreten Toleranzsatz, so wird Gl.(2.125) nicht berechnet, sondern sofort zum nächsten Toleranzsatz übergegangen.

In der obenstehenden Tabelle für die Toleranzen der vier Netzwerke von Bild 32 sind die optimalen diskreten Toleranzsätze mit aufgeführt. Wie man sieht, wurden die kontinuierlichen Werte im allgemeinen auf die am nächsten liegenden diskreten Toleranzen auf- oder abgerundet. Die Kosten für die einzelnen Netzwerke liegen jetzt zwar über dem Minimalwert bei kontinuierlichen Toleranzen, aber immer noch erheblich tiefer als bei gleich großen Toleranzen. Netzwerk 3 erweist sich auch hier als das günstigste. Die Bedingung Gl.(2.125) wird in allen vier Fällen ziemlich ausgenutzt. Die Größe F_0 kann die Unterschiede in den Gesamtkosten bei optimalen diskreten Toleranzen für die einzelnen Netzwerke nicht unerheblich verschieben. Zum Beispiel ergeben sich bei $F_0 = 10^{-3}$ für die obigen vier Netzwerke die Gesamtkosten bei optimalen diskreten Toleranzen zu:

Netzwerk 1	Netzwerk 2	Netzwerk 3	Netzwerk 4
346	381	346	364

Der zugehörige Wert von F errechnet sich mit Gl.(2.125) zu:

$9.34 \cdot 10^{-4}$	$8.39 \cdot 10^{-4}$	$8.93 \cdot 10^{-4}$	$9.16 \cdot 10^{-4}$
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

Netzwerk 1 und 3 sind hier also kostengleich. Netzwerk 3 ist aber auch jetzt vorzuziehen, da das entsprechende Toleranzmaß F etwas kleiner ist als bei Netzwerk 1.

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Frage untersucht, wie bei vorgegebener Gesamttoleranz Gl.(2.109) einer reellen Netzwerkfunktion durch optimale Wahl der Toleranzen der Bauelemente die Gesamtkosten einer Realisierung dieser Netzwerkfunktion minimiert werden können. Abschließend soll dazu noch etwas näher auf die Problematik und die Leistungsfähigkeit des obigen Verfahrens eingegangen werden.

Zur Lösung der Aufgabe wurden einige Annahmen bzw. Vereinfachungen getroffen, die zu einer geschlossenen Lösung des Problems bei geringem Rechenaufwand führten. So wurde die Dispersion $\sigma_f^2(\omega)$ der reellen Netzwerkfunktion $f(\omega)$ über die Näherungsformel Gl.(2.106) berechnet; außerdem wurde davon ausgegangen, daß $f(\omega)$ als Funktion der statistisch variierenden Bauelementewerte eine Gaußverteilung besitzt (und somit der Toleranzschlauch symmetrisch zur Sollfunktion verläuft). Der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung besagt aber, daß nur Summen bzw. Differenzen von zufälligen Veränderlichen asymptotisch normalverteilt sind. Bei den Übertragungsfunktionen elektrischer Netzwerke handelt es sich aber in der Regel um gebrochen rationale Funktionen, bei denen neben Summation auch Produkt- und Quotientenbildung eine wesentliche Rolle spielen. Selbst wenn die Realisierung viele Bauelemente enthält, können daher merkliche Abweichungen von einer Normalverteilung auftreten. Weiterhin muß erwähnt werden, daß durch die Wahl eines Integralkriteriums Gl.(2.109) nur eine mittlere, integrale Toleranz eingehalten wird und daher nicht garantiert ist, daß an allen Frequenzpunkten in dem betrachteten Intervall die vorgegebene maximale Toleranz für $f(\omega)$ nicht überschritten wird.

Aufgrund dieser Eigenschaften eignet sich das beschriebene Verfahren vor allem zum Kostenvergleich und zur Ermittlung optimaler Toleranzen im Entwurfsstadium von Netzwerken. Es kann damit sehr schnell und ohne großen Rechenaufwand ein Vergleich zwischen den Empfindlichkeits- bzw. Toleranzeigenschaften und den Gesamtkosten mehrerer äquivalenter Netzwerke angestellt werden und unter diesem Gesichtspunkt die günstigste Realisierung gefunden werden.

Je nachdem wie stark die Toleranzforderungen an die von den Netzwerken realisierten Übertragungsfunktionen sind, wird der vorläufig ermittelte Toleranzsatz noch mehr oder weniger geändert werden müssen. Entscheidend ist dabei, ob keines der realisierten Netzwerke auch nur an einem Frequenzpunkt in dem betrachteten Bereich die Toleranzgrenzen verletzen darf oder ob eine bestimmte Ausschußquote bei der Serienherstellung in Kauf genommen wird. Speziell im zweiten Fall kann mit dem beschriebenen Ver-

fahren weitergearbeitet werden. Dazu empfiehlt es sich, mit den vorläufig ermittelten diskreten Toleranzen über Gl.(2.106) an hinreichend vielen Frequenzpunkten in dem interessierenden Bereich die jeweilige Dispersion $\sigma_f^2(\omega)$ zu berechnen. Falls $f(\omega) \pm 3\sigma_f(\omega)$ im ganzen Bereich die für f vorgegebenen Toleranzschranken nicht verletzt, wird der vorläufig ermittelte Toleranzsatz belassen. Wenn jedoch an einigen Stellen die maximal zulässige Toleranz der Netzwerkfunktion überschritten wird, muß mit einer Gewichtsfunktion $\varphi(\omega)$ (Gl.(2.110)), die diese Stellen entsprechend betont, ein neuer Toleranzsatz ermittelt werden. Auf diese Weise läßt sich dann (eventuell in mehreren Schritten) ebenfalls ein Toleranzsatz finden, für den die Funktionen $f(\omega) \pm 3\sigma_f(\omega)$ die Toleranzschranken der Netzwerkfunktion einhalten.

Ausschuß (d.h. Netzwerke, die die Toleranzschranken von f verletzen) entsteht nun dadurch, daß der Wert von $\sigma_f^2(\omega)$ nur genähert berechnet wurde und die Verteilungsfunktion von f nur annähernd mit einer Normalverteilung übereinstimmt. Da die dabei entstehenden Fehler bzw. Abweichungen nicht bekannt sind, kann die Größe der Ausschußquote nicht unmittelbar bestimmt werden. Das ist erst mit einem erheblichen Aufwand möglich und erfordert an genügend vielen Frequenzpunkten die Durchführung von Monte-Carlo Analysen [53] zur Festlegung der Eckpunkte dieser Verteilungen. Ein solches Vorgehen ist auch immer dann erforderlich, wenn von sämtlichen realisierten Netzwerken die Toleranzschranken für $f(\omega)$ eingehalten werden müssen.

Um jedoch den Wert des mit großem Recheneinsatz erreichten Informationsgewinns beurteilen zu können, darf nicht vergessen werden, daß die Verteilung von f auch von der Form der Bauelementeverteilungen abhängt, die in den wenigsten Fällen bekannt sind. Pauschal läßt sich zwar sagen, daß mit zunehmender Zahl an Netzwerkelementen der Einfluß der Elementeverteilungen auf die Verteilung der Netzwerkfunktion zurückgeht. Um aber sicher zu gehen, wird man zunächst eine Verteilung wählen, die die unteren und oberen Grenzen der Toleranzbereiche der Bauelemente bevorzugt und die Ergebnisse anschließend mit den Resultaten vergleichen, die man z.B. bei Rechteckverteilung der Bauelementewerte erhält.

Zu der Worst-Case Analyse wäre noch zu bemerken, daß die hierbei gefundenen maximalen Abweichungen von der Sollfunktion mit einer Wahrscheinlichkeit auftreten, die sehr klein ist und im allgemeinen mit wachsender Zahl der Variablen immer geringer wird. Eine Toleranzbemessung der Netzwerkelemente nach den Ergebnissen einer Worst-Case Analyse wird daher in der Regel unwirtschaftlich sein.

Die vorangegangenen Erläuterungen zeigen, daß bei dem Problem der Toleranzoptimierung zwecks Kostenminimierung stets ein Kompromiß zwischen Aufwand und Genauigkeit geschlossen werden muß. Welches sinnvoller Aufwand dabei für eine benötigte Genauigkeit erforderlich ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden und erfordert eine gewisse Erfahrung. Das beschriebene Verfahren zur Bestimmung eines optimalen Toleranzsatzes stellt dabei im Vergleich zum benötigten Aufwand sicher eine gute Lösung dar.

III. DER ÜBERTRAGER ALS EMPFINDLICHKEITSTHEORETISCHES ELEMENT

3.1 Physikalische Grundlagen

In diesem Kapitel wird zum erstenmal versucht, die "Empfindlichkeit" eines Übertragers zu definieren. Das Vorhaben wird dadurch erschwert, weil das netzwerktheoretische Verhalten eines Übertragers im allgemeinen durch nur einen Parameter nicht ausreichend beschrieben werden kann.

Ausgangspunkt der Untersuchungen sind die physikalischen Zusammenhänge bei einem allgemeinen Übertrager nach Bild 62 [17].

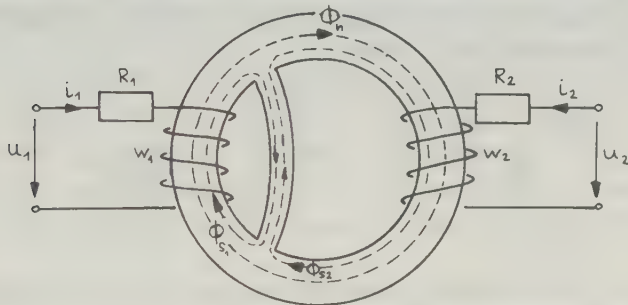


Bild 62

Dabei sind w_1 und w_2 die Windungszahlen für die Primär- bzw. Sekundärwicklung, während die Widerstände R_1 und R_2 die entsprechenden ohmschen Wicklungsverluste darstellen. In den späteren Betrachtungen werden letztere nicht berücksichtigt. Mit u_1 , u_2 , i_1 , i_2 sind die Zeitgrößen für Spannungen und Ströme bezeichnet. Es gelten dann die Beziehungen

$$u_1 = R_1 i_1 + w_1 \frac{d}{dt} (\Phi_h + \Phi_{s1}), \quad (3.1)$$

$$u_2 = R_2 i_2 + w_2 \frac{d}{dt} (\Phi_h + \Phi_{s2}), \quad (3.2)$$

wobei Φ_h = Hauptfluß durch beide Windungen,

Φ_{s1}, Φ_{s2} = Streufluß in der Primär- bzw. Sekundärwicklung.

Wegen des Durchflutungsgesetzes gilt [17]

$$\Phi_n = k(w_1 i_1 + w_2 i_2), \quad (3.3)$$

$$\Phi_1 = k_1 w_1 i_1, \quad (3.4)$$

$$\Phi_2 = k_2 w_2 i_2. \quad (3.5)$$

Die Konstanten k , k_1 , k_2 hängen von den geometrischen und physikalischen Materialeigenschaften des Kerns ab.

Können die Streuflüsse Φ_{S1} , Φ_{S2} gegenüber dem Hauptfluß Φ_n vernachlässigt werden, spricht man von fester Kopplung. Die Gln.(3.1,2) vereinfachen sich dann, wenn man die Wicklungswiderstände unberücksichtigt läßt, zu:

$$u_1 = k w_1^2 \frac{di_1}{dt} + k w_1 w_2 \frac{di_2}{dt}, \quad (3.6)$$

$$u_2 = k w_1 w_2 \frac{di_1}{dt} + k w_2^2 \frac{di_2}{dt}. \quad (3.7)$$

Im folgenden wird zunächst dieser Fall genauer untersucht, während der ideale Übertrager in Abschnitt 3.4 behandelt wird.

3.2 Wahl der unabhängigen Parameter und Empfindlichkeitseigenschaften des festgekoppelten Übertragers

Wie aus den Gln.(3.6,7) zu ersehen ist, wird das Klemmenverhalten des festverkoppelten Übertragers eindeutig von den drei physikalischen Größen k , w_1 und w_2 bestimmt. Diese drei Kenngrößen sind voneinander unabhängig und damit als Parameter für eine Empfindlichkeitsanalyse geeignet. Mit den üblichen Abkürzungen

$$L_1 = k w_1^2 = \text{primäre Hauptinduktivität}, \quad (3.8)$$

$$L_2 = k w_2^2 = \text{sekundäre Hauptinduktivität}, \quad (3.9)$$

$$M = k w_1 w_2 = \text{Gegeninduktivität}. \quad (3.10)$$

gilt der Zusammenhang

$$L_1 L_2 = M^2. \quad (3.11)$$

Es könnte der Einwand gebracht werden, daß zur Beschreibung des festverkoppelten Übertragers wegen Gl.(3.11) zwei Parameter, etwa L_1 und L_2 ausreichen. Für eine netzwerktheoretische Untersuchung ist dies richtig; für eine Empfindlichkeitsuntersuchung scheidet

diese Darstellung jedoch aus, da bei einer Interpretation des Empfindlichkeitsproblems auf statistischer Grundlage die Unabhängigkeit der Parameter eine wesentliche Voraussetzung ist. L_1 und L_2 sind aber wegen des Faktors k voneinander abhängig. Die Empfindlichkeit einer Netzwerkfunktion bezüglich L_1 , (L_2) zu bilden ist daher sinnlos, da sich L_2 , (L_1) gleichzeitig ändert, wenn der Parameter k die Änderung von L_1 , (L_2) bewirkt hat.

Die Empfindlichkeitseigenschaften eines festverkoppelten Übertragers nach Bild 63a lassen sich besonders gut mit Hilfe des entsprechenden T-Ersatzschaltbildes (Bild 63b) diskutieren. (Der allgemeine Fall des festverkoppelten Übertragers mit galvanischer Entkopplung zwischen Primär- und Sekundärseite kann analog behandelt werden, da der zusätzliche ideale Übertrager empfindlichkeitstheoretisch in diesem Fall keine Rolle spielt).

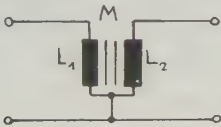


Bild 63a

≡

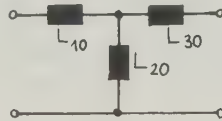


Bild 63b

Für den Zusammenhang zwischen den Parametern k , w_1 , w_2 und den abgeleiteten Größen L_{10} , L_{20} , L_{30} gilt dann

$$L_{10} = kw_1(w_1 - w_2), \quad (3.12)$$

$$L_{20} = kw_1w_2, \quad (3.13)$$

$$L_{30} = kw_2(w_2 - w_1) \quad (3.14)$$

und damit

$$L_{10}L_{20} + L_{10}L_{30} + L_{20}L_{30} = 0. \quad (3.15)$$

Man erkennt, daß für $w_1 \neq w_2$ jeweils zwei Induktivitäten einen positiven und die dritte einen negativen Wert besitzt. Sei nun f eine algebraisch dargestellte Netzwerkfunktion, die (neben den Parametern für die anderen Bauelemente) L_{10} , L_{20} , L_{30} als Beschreibungsgrößen für den festverkoppelten Übertrager enthält, $\bar{f}$ dieselbe Netzwerkfunktion, nur mit k , w_1 , w_2 als Parameter. Mit Hilfe der Kettenregel der Differentiation ergibt sich dann der wichtige Zusammenhang:

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_k \\ \bar{S}_{w_1} \\ \bar{S}_{w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 + \frac{w_1}{w_1 - w_2} & 1 & \frac{w_1}{w_1 - w_2} \\ -\frac{w_2}{w_1 - w_2} & 1 & 1 - \frac{w_2}{w_1 - w_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{L_{10}}^f \\ S_{L_{20}}^f \\ S_{L_{30}}^f \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Aus Gl.(3.16) folgt speziell:

$$\bar{S}_k = \sum_{\mu=1}^3 S_{L_{\mu 0}}^f, \quad (3.17)$$

$$\sum_{\mu=1}^3 \bar{S}_{w_{\mu}} = 2 \sum_{\mu=1}^3 S_{L_{\mu 0}}^f. \quad (3.18)$$

Die Empfindlichkeit $\bar{S}_k^f$ ist also gleich der Summenempfindlichkeit bezüglich der drei Induktivitäten in der äquivalenten T-Ersatzschaltung. Der Gl.(3.17) entnimmt man, daß die Größe von k bei gegebenem L_{10} , L_{20} , L_{30} die Empfindlichkeit bezüglich dieses Parameters nicht beeinflußt. Das gleiche gilt auch für die Empfindlichkeiten bezüglich w_1 und w_2 , da die Ausdrücke $w_1/(w_1 - w_2)$ bzw. $w_2/(w_1 - w_2)$ bei gegebenem L_{10} , L_{20} , L_{30} von k unabhängig sind.

Enthält das Netzwerk mehrere festverkoppelte Übertrager, so ergeben sich für jeden Übertrager zu Gl.(3.16) analoge Beziehungen. Die Berechnung der Empfindlichkeiten $\bar{S}_k^f$, $\bar{S}_{w_1}^f$, $\bar{S}_{w_2}^f$ nach Gl.(3.16) bereitet keine Schwierigkeiten, da bei Verwendung der T-Ersatzschaltung die Größen $S_{L_{\mu 0}}^f$, $\mu=1,2,3$ wie bei Netzwerken ohne Übertragern berechnet werden können. Der einzige Unterschied zu solchen RLC-Netzwerken besteht darin, daß eine der drei Induktivitäten einen negativen Wert besitzt. Auf die Invarianzeigenschaften der Summenempfindlichkeiten hat dies jedoch keinen Einfluß, denn die Beweisführung für die Gln.(1.29,31) war unabhängig vom Vorzeichen der Werte der einzelnen Netzwerkelemente. Wesentlich ausgenutzt wurde nur die Linearität der Netzwerkfunktion.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß die Parameter L_{10} , L_{20} und L_{30} nicht als Variable im Sinn von unabhängigen Größen betrachtet werden dürfen, da sie über die Gln.(3.12-14) miteinander verknüpft sind. Die Empfindlichkeiten $S_{L_{\mu 0}}^f$ besitzen daher für sich genommen keine Aussagekraft, da sie durch Variation des Elements $L_{\mu 0}$ unter Konstanthaltung aller $L_{\nu 0}$, $\nu \neq \mu$ gebildet wurden.

Die $L_{\mu 0}$ stellen praktisch nur formale Abkürzungen für die rechten Seiten der Gln.(3.12-14) dar, mit denen sich bequem rechnen läßt.

3.3 Einfluß von festverkoppelten Übertragern auf die Gesamtempfindlichkeit eines Netzwerks

Um diese Frage zu beantworten, werden zunächst anhand einiger Beispiele äquivalente Netzwerke mit und ohne Übertrager in bezug auf ihre Gesamtempfindlichkeit miteinander verglichen. Zuvor sei aber noch darauf hingewiesen, was bereits im Abschnitt 2.2 über die Verwendung von Φ^f als Empfindlichkeitsmaßstab gesagt wurde. Bei der Berechnung von Φ^f werden alle Netzwerkelemente als gleichberechtigte Parameter behandelt bzw. Φ^f ist proportional zur Dispersion σ_f^2 von f unter der Voraussetzung, daß alle Netzwerkelemente die gleiche Streuung besitzen. Bei Netzwerken mit Übertragern ist dieses Vorgehen problematisch, da die Größen k , w_1 und w_2 neben Ohmwidständen, Induktivitäten und Kapazitäten gleichgestellt als Netzwerkparameter behandelt werden. Andererseits kann bei einer allgemeinen Untersuchung der Einfluß der einzelnen Parameter mit voneinander verschiedenen Toleranzen auf die betrachtete Netzwerkgröße kaum entsprechend bewertet werden. Als Ausweg bietet sich hier an, bei der Bildung der Gesamtempfindlichkeit zunächst den von den Übertragern herrührenden Anteil und den Einfluß der übrigen passiven Netzwerkelemente voneinander getrennt zusammenzufassen. Bei den folgenden Beispielen wird zu diesem Zweck der Frequenzverlauf des prozentualen Anteils der Übertrager an der Gesamtempfindlichkeit dargestellt. Hieraus kann dann die Gesamtempfindlichkeit bei entsprechend bewerteten Empfindlichkeiten für die Übertragerkenngrößen schnell abgeschätzt werden.

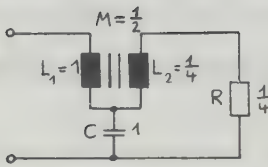
In einem ersten Beispiel wird die Zweipolfunktion

$$Z = \frac{p^2 + p + 1}{p^2 + p + 4} \quad (3.19)$$

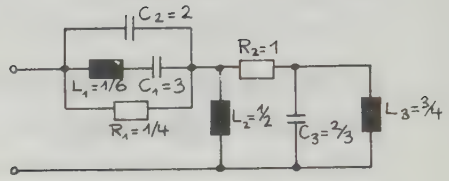
betrachtet. Zwei äquivalente Realisierungen nach Brune (Netzwerk 1) bzw. Bott-Duffin (Netzwerk 2) zeigt Bild 64.

Bild 65 zeigt den Frequenzverlauf des Quotienten $\Phi_1^{131^2} / \Phi_2^{131^2}$. Die Gesamtempfindlichkeit von Netzwerk 1 ergab sich dabei zu

$$\Phi_1^{131^2} = (S_k^{1y^1})^2 + (S_{w_1}^{1y^1})^2 + (S_{w_2}^{1y^1})^2 + (S_C^{131^2})^2 + (S_R^{131^2})^2 \quad (3.20)$$



Netzwerk 1



Netzwerk 2

Bild 64

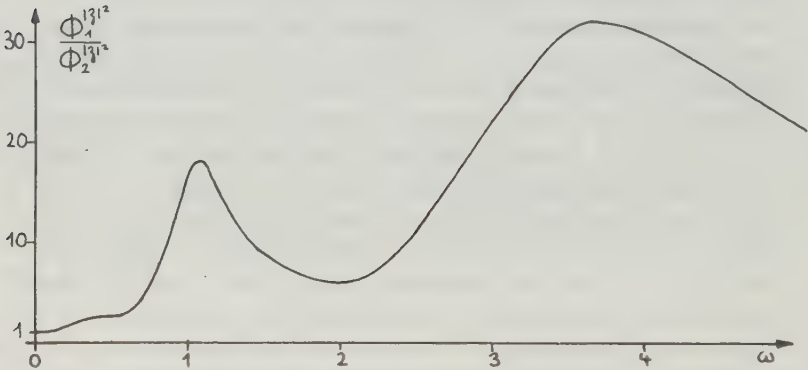


Bild 65

Vergleich der Empfindlichkeiten der Netzwerke von Bild 64 bei $\omega=3.4$.

Netzwerk 1

$$\begin{aligned} S_K^{131^2} &= \sum_{\mu} S_{L_{\mu o}}^{131^2} = -0.66 \\ S_{w_1}^{131^2} &= +8.45 \\ S_{w_2}^{131^2} &= -9.79 \\ S_C^{131^2} &= -1.61 = \sum_{\mu} S_{C_{\mu}}^{131^2} \\ S_R^{131^2} &= +2.64 = \sum_{\mu} S_{R_{\mu}}^{131^2} \\ \Phi_1^{131^2} &= 167 + 10 = 177 \end{aligned}$$

Netzwerk 2

$$\begin{aligned} S_R^{131^2} &= -0.07 \\ S_{R_1}^{131^2} &= +0.85 \\ S_{R_2}^{131^2} &= -0.03 \\ S_C^{131^2} &= -0.46 \\ S_{C_1}^{131^2} &= -2.04 \\ S_{C_2}^{131^2} &= -0.17 \\ S_{L_1}^{131^2} &= +0.79 \\ S_{L_2}^{131^2} &= -0.35 \\ S_{L_3}^{131^2} &= 5.9 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \sum_{\mu} S_{R_{\mu}}^{131^2} &= 0.78 \\ \sum_{\mu} S_{C_{\mu}}^{131^2} &= -2.53 \\ \sum_{\mu} S_{L_{\mu}}^{131^2} &= 0.26 \end{aligned} \right.$$

Für die Bott-Duffin Realisierung ist zunächst eine im allgemeinen geringere Gesamtempfindlichkeit wegen der größeren Zahl an Netzwerkelementen zu erwarten. Ein Unterschied in der Gesamtempfindlichkeit um einen Faktor 30 ist jedoch auf den Übertrager zurückzuführen, wie die Größe der Einzelempfindlichkeiten bei der Frequenz $\omega=3.4$ in der obigen Tabelle zeigt.

Man sieht zunächst, daß die Summenempfindlichkeiten für die einzelnen Arten von Netzwerkelementen nicht übereinstimmen, aber zumindest von gleicher Größenordnung sind. Das gleiche gilt für die Einzelempfindlichkeiten mit Ausnahme der sehr großen Empfindlichkeiten der Windungszahlen des Übertragers, die entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Der vom Übertrager herrührende Anteil an der Gesamtempfindlichkeit ist daher auch sehr hoch, wie Bild 66 zeigt.

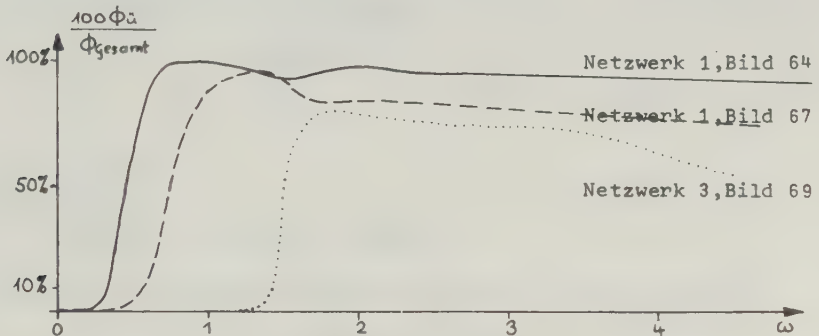


Bild 66: Prozentualer Anteil des Übertragers an der Gesamtempfindlichkeit für verschiedene Netzwerke.

Aus Bild 66 ist zu ersehen, daß der prozentuale Beitrag des Übertragers zur Gesamtempfindlichkeit für Netzwerk 1 aus Bild 64 bis auf den Bereich sehr niedriger Frequenzen stets über 90% beträgt. Auffallend ist dabei der sehr steile Übergang von nahezu 0% auf fast 100% sowie der gleichmäßige Verlauf in dem sich anschließenden Frequenzbereich, obwohl die betrachtete Funktion $|z|^2$ Gl.(3.19) bei $\omega \approx 2$ ein deutliches Maximum aufweist.

Das zweite Beispiel, bei dem die Impedanzfunktion

$$z = \frac{p^2 + p + 1}{p^2 + p + 2} \quad (3.21)$$

einmal nach Brune (Netzwerk 1) sowie Übertragerlos (Netzwerk 2) realisiert wird (Bild 67) zeigt, daß das Übertragerlose Netzwerk nicht immer eine geringere Gesamtempfindlichkeit besitzen muß.

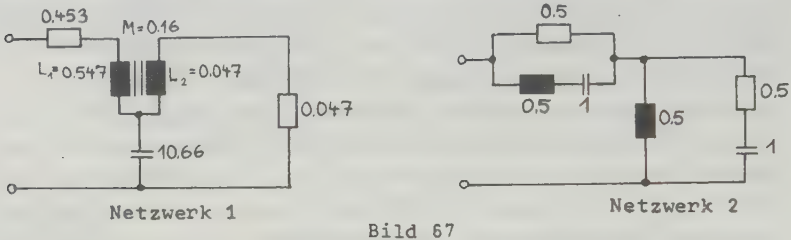


Bild 67

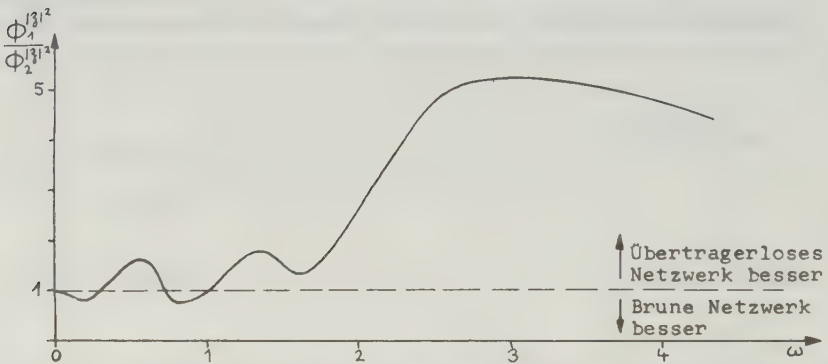


Bild 68: Vergleich der Gesamtempfindlichkeiten für die Netzwerke von Bild 67.

Bild 68 zeigt, daß hier der Unterschied in der Gesamtempfindlichkeit nicht so groß ist. Zum Teil läßt sich das mit der für beide Netzwerke jeweils gleichen Zahl an Parametern begründen, außerdem ist der prozentuale Beitrag des Übertragers zur Gesamtempfindlichkeit hier niedriger als beim obigen Beispiel, wie Bild 66 zeigt.

Im dritten Beispiel werden mehrere äquivalente Realisierungen eines Cauertiefpasses vierten Grades (Bild 69) miteinander verglichen. Der Tiefpaß wird zwischen zwei gleich großen Ohmwiderständen betrieben. Untersucht wird die Netzwerkfunktion $|f|^2 = |U_2/U_1|^2$, deren Verlauf mit in Bild 70 eingezeichnet ist.

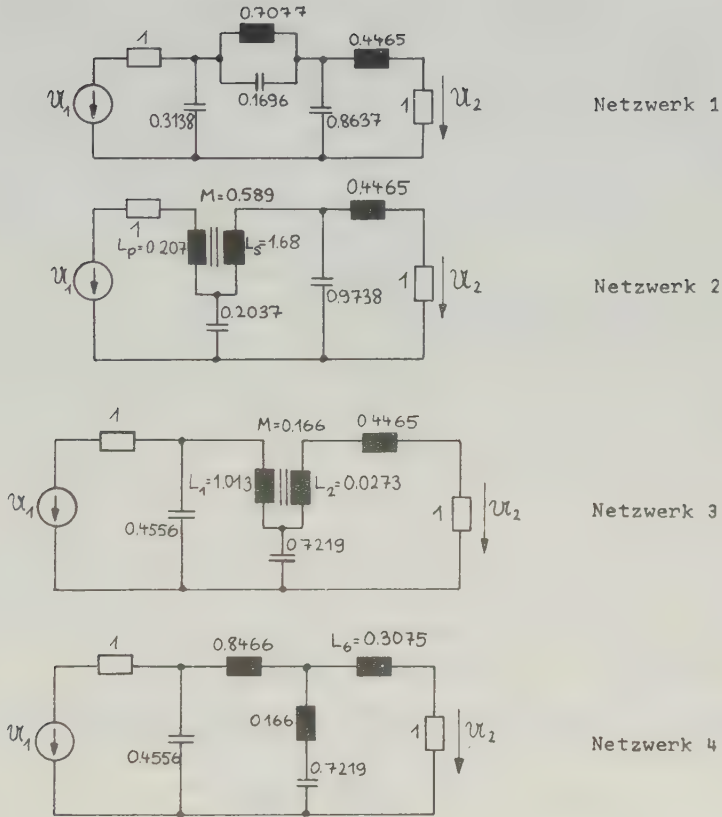


Bild 69

Bild 70 zeigt zunächst, daß beim Übergang vom Durchlaß- in den Sperrbereich des Filters der größte Unterschied in der Gesamtempfindlichkeit zwischen dem Übertragerlosen Netzwerk 1 und den Netzwerken 2,3 besteht. Parallel dazu steigt auch der prozentuale Beitrag des Übertragers zur Gesamtempfindlichkeit bei $\omega=1.3$ steil an (Bild 66). Man sieht außerdem, daß Netzwerk 1 stets eine geringere Gesamtempfindlichkeit besitzt als die Netzwerke mit Übertrager.

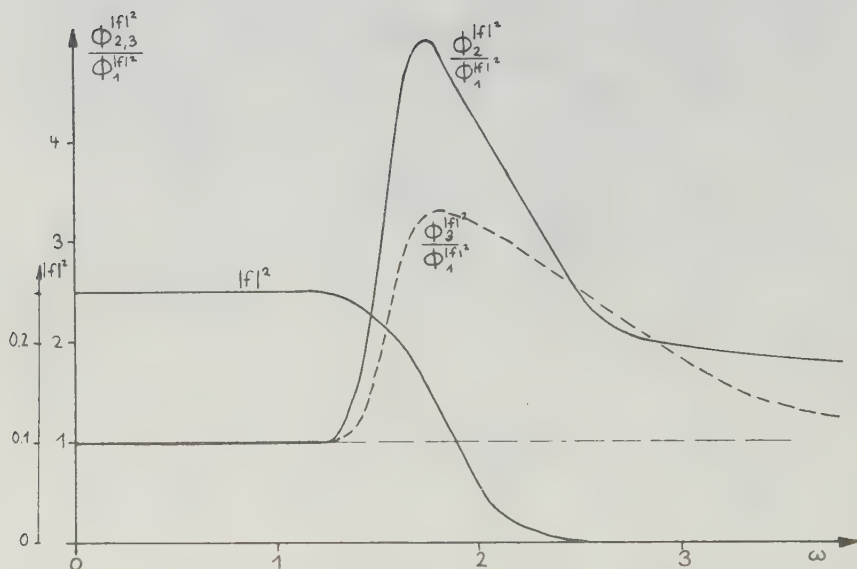


Bild 70: Vergleich der Gesamtempfindlichkeit mehrere äquivalenter Cauer Tiefpässe C 04 mit und ohne Übertrager.

Für Netzwerk 3 läßt sich das begründen, wenn man anstelle des Übertragers dessen T-Ersatzschaltbild verwendet (Bild 71).

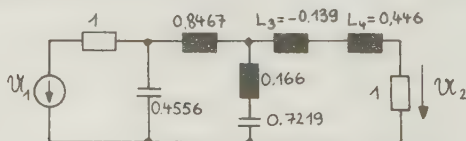


Bild 71

Die Induktivitäten L_3 und L_4 lassen sich dann zur Induktivität L_6 zusammenfassen und man erhält Netzwerk 4. Netzwerk 1 und Netzwerk 4 besitzen aber nahezu die gleiche Gesamtempfindlichkeit, wie ein Vergleich der Netzwerke ergibt. Für die Differenz $\Phi_3 - \Phi_4$ erhält man:

$$\Phi_3 - \Phi_4 = [(0.45)^2 + (1.45)^2 - 1] (S_{L_6}^2)^2 = 1.3 (S_{L_6}^2)^2.$$

Die größere Gesamtempfindlichkeit von Netzwerk 4 kann also damit erklärt werden, daß die Induktivität L_6 von Netzwerk 4 in zwei Induktivitäten mit positivem bzw. negativem Wert zerlegt wurde. Hätte man dagegen L_6 durch zwei gleich große Induktivitäten mit den positiven Werten $L_6/2$ ersetzt, so würde das entstehende Netzwerk 5 gegenüber Netzwerk 4 stets eine geringere Gesamtempfindlichkeit besitzen:

$$\Phi_5^{H^2} - \Phi_4^{H^2} = 2 \left(\frac{S_{L_6}^{H^2}}{2} \right)^2 - (S_{L_6}^{H^2})^2 = -\frac{1}{2} (S_{L_6}^{H^2})^2.$$

In den bisherigen Beispielen waren die Netzwerke ohne festverkoppelte Übertrager vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus fast stets überlegen. Allgemein begründen läßt sich das einmal anhand der Gl.(3.16) für die Empfindlichkeiten der Übertragerkenngrößen. Wegen der dort auftretenden Summenbildung können die Empfindlichkeiten die der übrigen Netzwerkelemente um eine Größenordnung übertreffen.

Eine andere Begründung ist mit Hilfe der Netzwerkfunktion in der algebraischen Form möglich. Die Parameter w_1, w_2 können hier im Gegensatz zu den anderen Netzwerkelementen (siehe Gl.(1.21)) nicht nur linear auftreten, wie das für Netzwerk 1 von Bild 64 die Gl.(3.22) verdeutlicht.

$$\gamma(p) = \frac{p^2 R C k w_1^2 + p k (w_1 - w_2)^2 + R}{p^2 C k w_1^2 + p R C + 1} \quad (3.22)$$

Daß diese Sonderstellung der Übertragerkenngrößen w_1, w_2 Auswirkungen auf die Größe der Empfindlichkeiten hat, ist verständlich. Der Parameter k dagegen kann in Impedanz-, Admittanz- oder Übertragungsfunktionen entsprechend Gl.(1.21) nur linear enthalten sein. Das sieht man am einfachsten anhand des in Bild 71a dargestellten Ersatznetzwerks für den festverkoppelten Übertrager ein.

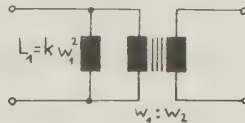


Bild 71a

Die Induktivität L_1 kann in den oben angeführten Netzwerkfunktionen entsprechend Gl.(1.21) nur linear auftreten. Das gleiche gilt für k , da dieser Parameter im Ersatznetzwerk nur im Zusam-

menhang mit $L_1 = kw_1^2$ auftaucht.

Eine physikalische Begründung für den nachteiligen Einfluß eines festverkoppelten Übertragers auf die Gesamtempfindlichkeit eines Netzwerks läßt sich gut für den Grenzfall $w_1 = w_2$ geben. Im Ersatznetzwerk verschwindet dann L_1 und L_3 , übrig bleibt die Induktivität $L_2 = kw_1w_2$. (Eine eventuell erforderliche galvanische Entkopplung, die zusätzlich einen idealen Übertrager benötigt, bleibt unberücksichtigt). Es gilt dann:

$$S_k^f = S_{w_1}^f = S_{w_2}^f = S_{L_2}^f. \quad (3.23)$$

Bildet man die Ausdrücke Φ^f bzw. $\Phi^{\bar{f}}$, so erscheint beim Netzwerk mit Übertrager als Summand $3(S_{L_2}^f)^2$, im Übertragerlosen Netzwerk nur $(S_{L_2}^f)^2$. In letzterem kann nur das eine Element L_2 eine Änderung der Netzwerkfunktion hervorrufen, im Übertragernetzwerk dagegen hat jeder der drei Parameter k, w_1, w_2 den gleichen Einfluß wie L_2 , was natürlich die Gesamtempfindlichkeit vergrößert.

3.4 Der ideale Übertrager und seine Empfindlichkeit

Zur netzwerktheoretischen Beschreibung eines idealen Übertragers [17] genügt eine einzige Größe, das Übersetzungsverhältnis $\bar{u} = w_1/w_2$. Man kann $\bar{u}$ auch als Parameter für eine Empfindlichkeitsanalyse benutzen, da in der Netzwerkfunktion nur $\bar{u}$, nicht aber w_1 oder w_2 allein auftauchen. Allerdings können auch Potenzen von $\bar{u}$ auftreten, womit die Übertragungsfunktion bezüglich $\bar{u}$ nicht mehr linear ist. Außerdem unterscheidet sich das Übersetzungsverhältnis als Variable insofern von den übrigen passiven Netzwerkelementen, als $\bar{u}$ durch Quotientenbildung aus zwei statistisch voneinander unabhängigen Größen entsteht. Bezeichnen $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ die Mittelwerte von w_1, w_2 und $\sigma_{w_1}, \sigma_{w_2}$ die Streuungen dieser Größen, dann ergibt sich für den Mittelwert von $\bar{u}$ genähert [19]:

$$E(\bar{u}) \approx \frac{\bar{w}_1}{\bar{w}_2} \left(1 + \left(\frac{\sigma_{w_1}}{\bar{w}_1} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sigma_{w_2}}{\bar{w}_2} \right)^2 \right). \quad (3.24)$$

Der statistische Mittelwert von $\bar{u}$ liegt also über dem Nominalwert $\bar{u} = \bar{w}_1/\bar{w}_2$, ein Charakteristikum bei der Quotientenbildung zweier statistisch unabhängiger Variabler. Für die Dispersion ergibt sich:

$$\sigma_{\bar{u}}^2 \approx \left(\frac{\bar{w}_1}{\bar{w}_2} \right)^2 \left[\left(\frac{\sigma_{w_1}}{\bar{w}_1} \right)^2 + 8 \left(\frac{\sigma_{w_2}}{\bar{w}_2} \right)^4 \right] + \left(\frac{\sigma_{w_1}}{\bar{w}_1} \right)^2 \left(1 + 3 \left(\frac{\sigma_{w_2}}{\bar{w}_2} \right)^2 \right). \quad (3.25)$$

Für $w_1 = w_2 = w$ und genügend kleines $\sigma_{w_1} = \sigma_{w_2} = \sigma_w$ gilt dann genähert:

$$\sigma_u/\bar{u} \approx \sqrt{2} \sigma_w/w; \quad \bar{u}=1. \quad (3.26)$$

Die relative Streuung $\sigma_u/\bar{u}$ ist hier also um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als die relative Streuung σ_w/w von w_1 oder w_2 . Außerdem besitzt $\bar{u}$ eine völlig andere Wahrscheinlichkeitsverteilung als w_1 oder w_2 . In einer Netzwerkfunktion mit einer nicht zu kleinen Anzahl von variierenden Größen ($n > 10$) hat allerdings die Gestalt der Wahrscheinlichkeitsverteilung des einzelnen Netzwerkelements im allgemeinen nur noch einen geringen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Netzwerkfunktion. Ausschlaggebend für die Kenngrößen der Verteilung der Netzwerkfunktion sind dann die Streuungen der einzelnen Parameter sowie die Verknüpfung dieser Parameter über die Netzwerkfunktion. Es soll nun die Empfindlichkeit eines idealen Übertragers untersucht werden, der sekundärseitig an einem passiven RLC-Zweitor zur Impedanztransformation dient, eine praktisch oft verwendete Schaltung (Bild 72) [47].

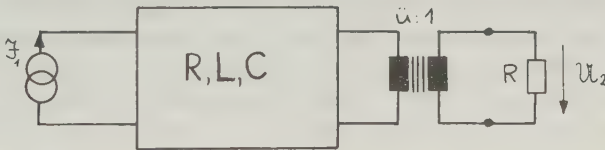


Bild 72

Dann gilt, falls die Impedanzmatrix des Zweitors existiert:

$$f = \bar{U}_2/\bar{I}_1 = z_{21}\bar{U}_R/(z_{22} + \bar{u}^2 R) = Z/N. \quad (3.27)$$

Für die Empfindlichkeit von f bezüglich des Übersetzungsverhältnisses erhält man:

$$S_u^f = \frac{f}{N} (z_{22} - \bar{u}^2 R). \quad (3.28)$$

Dieser Ausdruck wird Null, wenn entweder

$$R = z_{22}/\bar{u}^2 \quad (3.29a)$$

oder $f=0$ gilt. Die rechte Seite von Gl.(3.29a) stellt den sekundärseitigen Eingangswiderstand des Netzwerks bei leerlaufender Primärseite nach Abtrennung des Ohmwidestands R dar. Falls dieser Eingangswiderstand für irgendein $p_o = j\omega_o$ reell wird, kann die Übertragerempfindlichkeit Null werden. Das tritt genau dann ein,

wenn Gl.(3.29a) erfüllt ist. Betrachtet man Gl.(3.27) an der Stelle p_0 als Funktion des Übersetzungsverhältnisses $\bar{u}$, so erhält man mit Gl.(3.29a), wobei $\bar{u}_0$ den Sollwert von $\bar{u}$ bezeichnet:

$$f(\bar{u}, p_0) = z_{21}(p_0) \bar{u} / (\bar{u}_0^2 + \bar{u}^2). \quad (3.29b)$$

Wie man sofort sieht, wird die Funktion $y(\bar{u}) = \bar{u} / (\bar{u}_0^2 + \bar{u}^2)$ für $\bar{u} = \bar{u}_0$ maximal, weshalb sich an der Stelle p_0 bei jeder Änderung von $\bar{u}$ der Real- und Imaginärteil der Übertragungsfunktion Gl.(3.27) nur verkleinern kann. Gl.(3.28) zeigt, daß $S_{\bar{u}}^f$ an Stellen mit $f \neq 0$ nie Null wird, wenn es sich beim Netzwerk von Bild 72 um ein Reaktanzzweitor handelt. Beschränkt man sich aber auf $|f|^2$ als Netzwerkfunktion, dann verschwindet wegen

$$S_{\bar{u}}^{|f|^2} = \frac{2|z_{21}|^2 \bar{u}^2 R^2}{(|z_{21}|^2 + \bar{u}^2 R^2)^2} (|z_{21}|^2 - \bar{u}^2 R^2) \quad (3.30)$$

an Stellen mit $p = p_\mu = j\omega_\mu$ mit $|z_{22}(p_\mu)| = \bar{u}^2 R$ ebenfalls die Empfindlichkeit $S_{\bar{u}}^{|f|^2}$.

Bei einem Netzwerk nach Bild 72 interessiert nun der Beitrag des Übertragers zur Gesamtempfindlichkeit $\Phi^{|f|^2}$ des Netzwerks. Leider läßt sich hierüber aus Gl.(3.30) keine allgemeine Aussage gewinnen. Prinzipiell kann nur folgendes gesagt werden: Der Übertrager stellt ein zusätzliches, die Netzwerkfunktion beeinflussendes Element dar. Seine Kenngröße $\bar{u}$ unterscheidet sich von den übrigen Variablen, weil $\bar{u}$ in der Netzwerkfunktion (Impedanz-, Admittanz- oder Übertragungsfunktion) nicht nur gebrochen linear auftreten muß wie die anderen Netzwerkelemente gemäß Gl.(1.21). Die Übertragerempfindlichkeit kann daher die Gesamtempfindlichkeit merklich beeinflussen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Betrachtet wird eine weitere Realisierung der Übertragungsfunktion Gl.(2.61), bei der ein idealer Übertrager notwendig wird (Bild 73, Netzwerk 5).

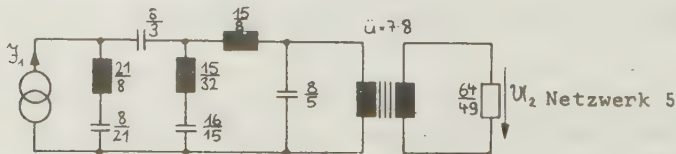


Bild 73

Untersucht man den prozentualen Anteil des Übertragers an der Gesamtempfindlichkeit, so ergeben sich teilweise hohe Werte, wie Bild 74 zeigt.

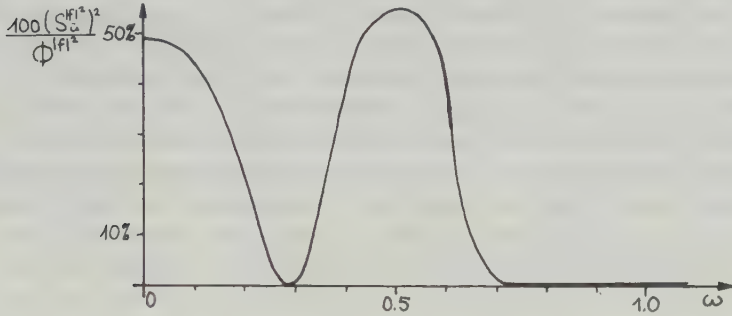


Bild 74

Auch beim Vergleich mit den übertragerlosen Realisierungen Bild 32 schneidet Netzwerk 5 schlecht ab. In Bild 75 ist der Quotient der Gesamtempfindlichkeiten zwischen Netzwerk 5 und den Netzwerken 2 und 3 von Bild 32 aufgetragen.

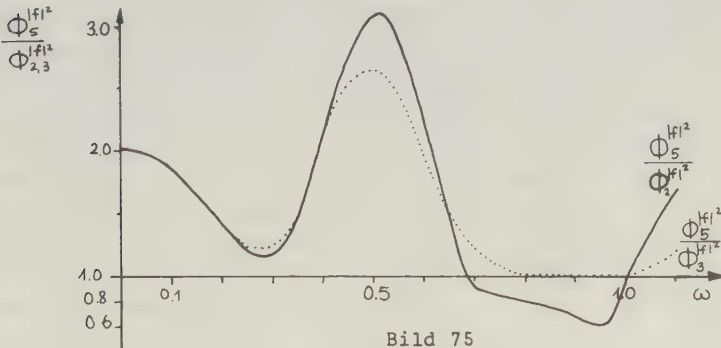


Bild 75

Man sieht, daß in der Umgebung von $\omega=0.5$, wo der prozentuale Anteil der Übertragerempfindlichkeit an der Gesamtempfindlichkeit von Netzwerk 5 maximal ist, auch der Unterschied zu den übertragerlosen Netzwerken maximal ist. Im Bereich $0.7 < \omega < 1$ weist dagegen Netzwerk 5 die geringere Gesamtempfindlichkeit auf (in bezug auf Netzwerk 2), was vor allem darauf zurückzuführen ist, daß hier

der Einfluß der Übertragerempfindlichkeit vernachlässigt werden kann.

Zusammenfassend stellt man fest, daß für den festverkoppelten und den idealen Übertrager eine zufriedenstellende Empfindlichkeitsbeschreibung gefunden werden konnte. Speziell im Fall des festverkoppelten Übertragers gestaltet sich die numerische Berechnung der entsprechenden Empfindlichkeiten sehr einfach und kann wie bei Netzwerken ohne Übertrager durchgeführt werden. Schwieriger ist die Frage zu beantworten, wie die Gesamtempfindlichkeit von Netzwerken durch das Vorhandensein von Übertragern beeinflußt wird. In einigen Fällen konnte die nachteilige Wirkung von Übertragern auf die Gesamtempfindlichkeit anschaulich begründet werden, während für den allgemeinen Fall nur qualitative Hinweise möglich sind, warum Realisierungen mit Übertragern in der Regel eine größere Gesamtempfindlichkeit als äquivalente Übertragerlose Netzwerke besitzen.

IV. EMPFINDLICHKEITS- UND TOLERANZPROBLEME BEI AKTIVEN RC- NETZWERKEN

4.0 Vorbemerkungen

Elektrische Netzwerke, die als passive Elemente nur Ohmwiderrstände und Kapazitäten enthalten, sind interessant für die Anwendung, da diese Elemente gewöhnlich billiger, leichter, kleiner und idealer zu verwirklichen sind als Induktivitäten. Allerdings ist für Übertragungsfunktionen passiver RC-Zweitore die Lage der Pole auf die negativ reelle Achse beschränkt [47], was die Anwendbarkeit solcher Netzwerke sehr begrenzt. Um diese Einschränkung aufzuheben, ist die Hinzunahme aktiver Elemente nötig, womit dann aktive RC-Netzwerke mit der gleichen Selektivität wie RLC-Netzwerke hergestellt werden können. Angeregt wurde diese Technik durch die grundlegende Arbeit von LINVILL 1954 [26]. Seitdem wurden zahlreiche andere Syntheseverfahren unter Verwendung von Negativ-Impedanz-Konvertern, Gyrotoren und Verstärkern veröffentlicht.

Ein wesentliches Kriterium für die Qualität dieser Netzwerke stellt dabei das Empfindlichkeitsverhalten der realisierten Netzwerkfunktion gegenüber Schwankungen der Elementewerte dar. In den meisten Veröffentlichungen wird jedoch dieses Thema nur insofern behandelt, als die Einzelempfindlichkeiten berechnet werden und gezeigt wird, daß man diesbezüglich eine Verbesserung gegenüber bereits bekannten Netzwerkkonfigurationen erreichen kann. Dagegen wird nicht beachtet, daß erst die Einzelempfindlichkeiten zusammengefaßt über Gl.(2.5) oder Gl.(2.6) die Beurteilung eines Netzwerks vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus gestatten. Ebenso wenig wird die Frage nach dem prinzipiellen Minimum der Gesamtempfindlichkeit erörtert.

Es ist daher nicht Ziel dieses Kapitels, zu den vielen bekannten aktiven RC-Strukturen eine weitere mit günstigem Empfindlichkeitsverhalten hinzuzufügen. Im folgenden sollen vielmehr unabhängig von speziellen Netzwerkkonfigurationen die allgemeinen Grundlagen für eine Empfindlichkeitstheorie aktiver RC-Netzwerke zusammengestellt werden. Dazu ist zunächst eine ausführliche Dis-

kussion über die empfindlichkeitstheoretische Beschreibung aktiver Parameter nötig, damit anschließend die fundamentalen Probleme der Faktorisierung sowie Gruppierung von Pol- und Nullstellen der zu realisierenden Übertragungsfunktion unter dem Gesichtspunkt der Gesamtempfindlichkeit behandelt werden können. Schließlich wird die Frage nach dem Minimum der Gesamtempfindlichkeit erörtert und anhand von Beispielen gezeigt, daß mit den zur Verfügung stehenden Methoden der aktiven RC-Synthese die untere Grenze für die Gesamtempfindlichkeit in gewissem Sinn teilweise erreicht wird.

4.1 Die Charakterisierung der Empfindlichkeiten aktiver Netzwerkelemente

In den bisherigen Ausführungen wurden mit Ausnahme des Übertragers nur zweipolige Elemente betrachtet, deren netzwerktheoretisches Verhalten sich gut durch nur eine physikalische Größe beschreiben ließ. Der festverkoppelte Übertrager als zweitoriges Element erforderte zur Beschreibung seines Empfindlichkeitsverhaltens bereits drei unabhängige Parameter, die ebenfalls physikalische Eigenschaften darstellten. Die in aktiven Netzwerken benutzten Elemente wie Verstärker, Negativ-Impedanz-Konverter oder Gyrationen verlangen eine neue Überlegung, da wegen der Verschiedenartigkeit der einzelnen Realisierungen für die aktiven Elemente keine elementaren physikalischen Größen zur Empfindlichkeitsbeschreibung gefunden werden können. Man ist deshalb gezwungen, auf die zur netzwerktheoretischen Beschreibung der idealisierten Elemente benutzten Parameter zurückzugreifen. Wie im einzelnen noch gezeigt wird, ist es aber damit nur begrenzt möglich, eine zufriedenstellende Empfindlichkeitsbeschreibung zu erreichen.

Am einfachsten liegt der Fall noch bei gesteuerten Quellen. Um das Klemmenverhalten einer idealen spannungsgesteuerten Spannungsquelle zu beschreiben, genügt eine einzige Größe, der reelle Verstärkungsfaktor μ ,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

der sich damit auch als Parameter für Empfindlichkeits- und Toleranzuntersuchungen anbietet (Bild 73).



Bild 73

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Netzwerkelementen R , L , C , $\bar{U}$ ist der Verstärkungsfaktor μ keine primäre physikalische Größe, sondern ergibt sich als eine komplizierte Funktion der Bauelemente der jeweiligen Verstärkerrealisierung. Dieser funktionale Zusammenhang ist aber für die Diskussion grundlegender Empfindlichkeitsprobleme aktiver Netzwerke uninteressant, da er von der speziellen Realisierung des Verstärkers abhängt. Er ist außerdem entbehrlich, da μ als die einzige von Null verschiedene Größe in der Netzwerkmatrix Gl.(4.1) das Klemmenverhalten des Verstärkers hinreichend charakterisiert und mit μ daher eine zufriedenstellende Empfindlichkeitsbeschreibung möglich ist.

Schwieriger als für den Verstärker gestaltet sich das Problem, für den Negativ-Impedanz-Konverter (NIC) Kenngrößen zu finden, die eine befriedigende Darstellung des Empfindlichkeits- bzw. Toleranzverhaltens erlauben.

Unter einem NIC versteht man ein Zweitor, dessen Eingangsimpedanz $Z_{in}(p)$ sich nach Bild 74 nur um den negativ reellen konstanten Faktor $-k$ von der sekundärseitigen Impedanz $Z_2(p)$ unterscheidet.

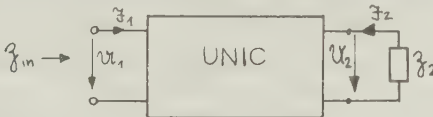


Bild 74

$$Z_{in} = U_1 / I_1 = -k Z_2. \quad (4.2)$$

Für den sogenannten Konversionsfaktor k wird dabei gewöhnlich $k=1$ gewählt. Ein mögliches Zweitor, das die Eigenschaften von Gl.(4.2) besitzt (die spannungsinvertierende Form des NIC, im folgenden UNIC genannt), läßt sich durch die h-Parameter folgen-

dermaßen beschreiben:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \quad (4.3)$$

$$h_{11} = h_{22} = 0, \quad h_{12} = -k, \quad h_{21} = -1. \quad (4.4)$$

Zur empfindlichkeitstheoretischen Untersuchung des NIC hat es sich eingebürgert [28], den Konversionsfaktor k als den einzigen beschreibenden Parameter für den NIC heranzuziehen. Ein solches Vorgehen lag aufgrund der Definitionsgleichung Gl.(4.2) nahe. Daß diese Methode außerdem für theoretische Untersuchungen vorteilhaft ist, läßt sich anhand der bekannten RC:NIC Struktur von LINVILL [26] (Bild 75) zeigen.

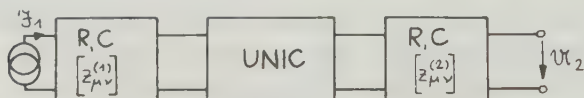


Bild 75

Es ergibt sich als Übertragungsfunktion

$$f = \frac{u_2}{i_1} = \frac{z_{21}^{(1)} z_{21}^{(2)}}{z_{22}^{(1)} - k z_{11}^{(2)}} = \frac{D(p)}{A(p) - k B(p)} = \frac{Z}{N} \quad (4.6)$$

mit entsprechenden Polynomen $A(p)$, $B(p)$, $D(p)$. Wesentlich ist, daß der Parameter k in dieser allgemeinen Form der Übertragungsfunktion explizit auftritt. In bestimmten Fällen ist es möglich, für eine nach Bild 75 realisierte Übertragungsfunktion ein Verfahren zur optimalen Zerlegung des Nenners von Gl.(4.5) anzugeben (HOROWITZ [27]), so daß der Betrag der Empfindlichkeit von f bezüglich des Parameters k ,

$$\left| S_k^f \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial k} \right| = \left| \frac{f}{N} k B(p) \right|, \quad p = j\omega \quad (4.6)$$

minimal wird. (HOROWITZ optimiert zunächst die Empfindlichkeiten der Koeffizienten des Nennerpolynoms bezüglich k und zeigt dann, daß dies gleichbedeutend ist mit einer Minimierung von $|B(j\omega)|$. Für die Netzwerkstruktur von Bild 75 ist wegen Gl.(4.6) darüber hinaus $|S_k^f(j\omega)|$ minimal.)

Problematisch wird die Charakterisierung des NIC durch den einzigen Parameter k , wenn Vergleiche mit den Empfindlichkeiten der passiven Elemente in den RC-Zweitoren (1) und (2) angestellt wer-

den. Handelt es sich doch einerseits um reelle physikalische Größen (Widerstände, Kapazitäten), während der Konversionsfaktor als Element der h-Matrix des NIC eine netzwerktheoretische Größe darstellt. Um die Grenzen für einen solchen Vergleich aufzuzeigen, müssen die Möglichkeiten zur Empfindlichkeitsbeschreibung des NIC genauer untersucht werden.

Zunächst gelingt es für den NIC prinzipiell nicht, wie beim Übertrager auf einen Satz physikalischer, voneinander unabhängiger Kenngrößen zurückzugreifen. Zur Empfindlichkeitsbeschreibung des idealen NIC verbleiben damit nur die beiden von Null verschiedenen Elemente h_{12} , h_{21} der h-Matrix (oder einer entsprechenden anderen Netzwerkmatrix). Ausgehend von der netzwerktheoretischen Darstellung ein UNIC nach Bild 76,

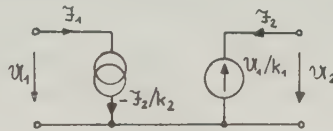


Bild 76

liegt es zunächst nahe, die zwei Größen $h_{12} = -k_1 = -1$ und $h_{21} = -k_2 = -1$ als beschreibende Parameter für den NIC zu verwenden. Für die nach LINVILL [26] realisierte Übertragungsfunktion (Bild 75) erhält man damit:

$$f = \frac{U_2}{J_1} = \frac{k_2 z_{21}^{(1)} z_{21}^{(2)}}{z_{22}^{(1)} - k_1 k_2 z_{11}^{(2)}} = \frac{k_2 D(p)}{A(p) - k_1 k_2 B(p)} . \quad (4.7)$$

Das Verfahren von HOROWITZ zur Minimierung von $|S_{k1}^f|$ kann auch hier angewendet werden und man erhält wegen $k_2 = 1$ dieselben Ergebnisse wie bei Verwendung von Gl.(4.5). Als Beitrag des NIC zur Gesamtempfindlichkeit ergibt sich dann mit Gl.(4.7)

$$|S_{k1}^f|^2 + |S_{k2}^f|^2 = \left| \frac{f}{N} \right|^2 (|B(p)|^2 + |A(p)|^2) . \quad (4.8)$$

Bei dem üblichen Verfahren, den NIC durch nur einen Parameter zu charakterisieren, wird $h_{12} = -k = -1$ gewählt und $h_{21} = -1$ gesetzt. Bei einer solchen Beschreibung erscheint in der Summe der quadrierten Beträge der Empfindlichkeiten als Anteil des aktiven Elementes nur der eine Term

$$|S_k^f|^2 = \left| \frac{f}{N} \right|^2 |B(p)|^2 . \quad (4.9)$$

Der Vergleich der Gln.(4.8,9) zeigt, daß sich wesentliche Unterschiede ergeben (vor allem für $|A(p)| > |B(p)|$), je nachdem ein oder zwei Parameter zur Empfindlichkeitsbeschreibung des NIC verwendet werden. Leider stellt keine der beiden Möglichkeiten den Idealfall dar. Für das übliche Verfahren fehlt zunächst die Begründung, warum für Empfindlichkeitszwecke die Größe h_{21} als unveränderlich nicht mit in die Betrachtungen einbezogen wird. Die Verwendung von k_1 und k_2 ist dagegen problematisch, da die beiden Parameter je nach der praktischen Ausführung des NIC mehr oder weniger voneinander abhängig sind. Anhand der Prinzipschaltung eines UNIC (Bild 77a) [25] soll das veranschaulicht werden.

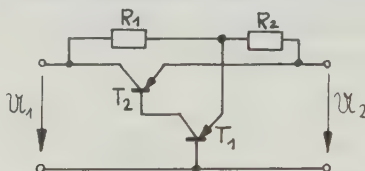


Bild 77a

Im niederfrequenten Bereich erhält man bei genügend großem R_1, R_2 für die h-Parameter, wenn α_1, α_2 die Basisstromverstärkungsfaktoren der jeweiligen Transistoren bezeichnen:

$$\begin{aligned} h_{11} &\approx \frac{R_1(1-\alpha_2)}{1+\alpha_1\alpha_2-\alpha_2}, & h_{12} &\approx \frac{-\alpha_1\alpha_2 R_1}{(1+\alpha_1\alpha_2-\alpha_2)R_2}, \\ h_{21} &\approx \frac{-\alpha_1}{1+\alpha_1\alpha_2-\alpha_2}, & h_{22} &\approx \frac{(1-\alpha_1)^2}{(1+\alpha_1\alpha_2-\alpha_2)R_2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Da die Werte von $\alpha_{1,2}$ etwa bei 0.99 liegen, werden die Forderungen von Gl.(4.4) hinreichend gut erfüllt. Wie man den Gln.(4.10) entnimmt, sind die vier h-Parameter über die Netzwerkelemente miteinander verknüpft, was die Verwendung von h_{12}, h_{21} als Empfindlichkeitsparameter sehr in Frage stellt.

Ein gewisser Ausweg aus den geschilderten Schwierigkeiten ist möglich, wenn die Realisierung des NIC bereits feststeht. Dann besteht die Möglichkeit, ein entsprechend vereinfachtes Ersatzschaltbild zu verwenden, das nur die wesentlichen passiven Elemente sowie gesteuerte Quellen enthält. Das bringt den Vorteil

mit sich, daß sich diese beiden Arten von Netzwerkelementen meist hinreichend durch nur einen Parameter beschreiben lassen und außerdem die netzwerktheoretischen Zusammenhänge einfach sind. So besitzt etwa der in Bild 77a dargestellte UNIC folgendes Ersatznetzwerk (Bild 77b).

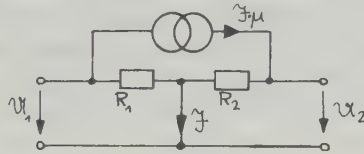


Bild 77b

Die zugehörigen h-Parameter lassen sich dann als Funktion der drei Kenngrößen R_1 , R_2 und μ sehr einfach angeben:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{R_1}{1 + \mu}, & h_{12} &= \frac{-\mu R_1}{R_2(1 + \mu)}, \\ h_{21} &= \frac{-\mu}{1 + \mu}, & h_{22} &= \frac{1}{R_2(1 + \mu)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Für hinreichend großes μ nähern sich die h-Parameter den Idealwerten. Aus den Gln.(4.11) erhält man jetzt mit der Kettenregel der Differentiation ($h_{11} = h_{22} = 0$), wobei die Netzwerkfunktion f als beschreibende Parameter für den NIC h_{12} , h_{21} enthält, während in $\bar{f}$ der NIC durch R_1 , R_2 , μ charakterisiert wird:

$$S_{R_1}^{\bar{f}} = -S_{R_2}^{\bar{f}} = S_{K_1}^f = S_{h_{22}}^f, \quad (4.12)$$

$$S_{\mu}^{\bar{f}} = (S_{h_{12}}^f + S_{h_{21}}^f) \frac{1}{1 + \mu}. \quad (4.13)$$

Bei diesem Netzwerk ist also für genügend großes μ allein die Empfindlichkeit $S_{h_{22}}^f = S_{K_1}^f$ wesentlich.

Zusammenfassend stellt man fest, daß die empfindlichkeitstheoretische Beschreibung des NIC auf einer allgemeinen Grundlage nur beschränkt möglich ist. Entsprechend vorsichtig müssen daher Vergleiche mit den Empfindlichkeiten passiver Netzwerkelemente bewertet werden, die allenfalls über Größenordnungen Auskunft geben können.

Die gleichen Schwierigkeiten, die für den NIC ausführlich geschildert wurden, treten auch bei der empfindlichkeitstheoretischen Beschreibung des Gyrators auf.

Der ideale Gyrator ist ein nichtreziprokes Zweitor, dessen Eingangsimpedanz proportional zur Admittanz der sekundärseitigen Last ist (Bild 78).

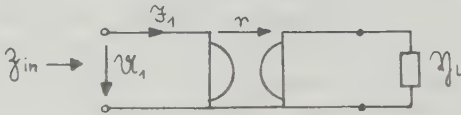


Bild 78

Es gilt
$$Z_{in} = r^2 Y_L, \quad (4.14)$$

wobei r den sogenannten Gyrationenwiderstand darstellt. Notwendig und hinreichend für die Impedanzmatrix eines idealen Gyrtors

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

sind die Bedingungen

$$z_{11} = z_{22} = 0, \quad z_{12} z_{21} = -r^2. \quad (4.16)$$

Von besonderer praktischer Bedeutung sind die Fälle $z_{21} = -z_{12} = r$. Ähnlich wie beim NIC ist es üblich, den Einfluß von Gyrtoren auf Netzwerkfunktionen durch die Empfindlichkeit bezüglich des Gyrationenwiderstandes r bzw. bezüglich r^2 zu beschreiben. Der Grund liegt darin, daß die Polstellenempfindlichkeit bezüglich r^2 bei einer Konfiguration wie in Bild 79 durch passende Wahl des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion Gl.(4.17) in bestimmten Fällen minimiert werden kann [29].

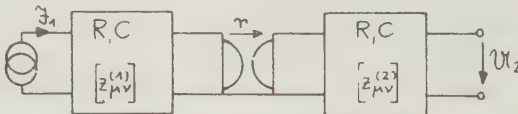


Bild 79

$$f = \frac{U_2}{I_1} = \frac{r z_{21}^{(1)} z_{21}^{(2)}}{z_{22}^{(1)} z_{11}^{(2)} + r^2}. \quad (4.17)$$

Die Argumente für und gegen ein solches Vorgehen zur Empfindlichkeitsbeschreibung des Gyrtors sind die gleichen wie beim NIC, so daß auf eine weitere Diskussion verzichtet werden kann.

Abschließend läßt sich damit sagen, daß für die aufgeführten aktiven Netzwerkelemente kein optimales Modell zur Beschreibung ihres empfindlichkeitstheoretischen Verhaltens gefunden werden kann. Es wird vielmehr vom speziellen Problem abhängen, welche Beschreibung man wählt und ob eine Charakterisierung durch nur einen Parameter ausreicht. Diese Beschreibung muß wegen ihrer Allgemeinheit vor allem bei theoretischen Fragen benutzt werden, wenn es um prinzipielle Vergleiche mehrerer Netzwerkkonfigurationen geht. Ein ausführlicheres Modell unter Berücksichtigung der Toleranzen ist dagegen angebracht, wenn die Netzwerkkonfiguration und die Art der Realisierung für das aktive Element bereits feststeht.

4.2 Summenempfindlichkeiten bei aktiven RC-Netzwerken

Gegeben sei ein Netzwerk, das außer Ohmwiderständen und Kapazitäten noch alle vier Arten von gesteuerten Quellen enthalten darf. Deren Übertragungskenngrößen $\mu_k, \alpha_k, r_k, g_k$ werden dabei wie folgt definiert:

$$U_2^{(k)} = \mu_k U_1^{(k)}, \quad (4.18)$$

$$\tilde{I}_2^{(k)} = \alpha_k \tilde{I}_1^{(k)}, \quad (4.19)$$

$$U_2^{(k)} = r_k \tilde{I}_1^{(k)}, \quad (4.20)$$

$$\tilde{I}_2^{(k)} = g_k U_1^{(k)}. \quad (4.21)$$

Dabei sind μ_k, α_k dimensionslose Größen, während r_k, g_k die Dimension von ohmschen Widerständen bzw. Leitwerten besitzen. Für eine Netzwerkfunktion f (ausschließlich Impedanz-, Admittanz- oder Übertragungsfunktion)

$$f = f(R_k, C_k, \mu_k, \alpha_k, r_k, g_k, p), \quad (4.22)$$

die von diesen Größen abhängt, erhält man mit den gleichen Argumenten, die zu Gl.(1.29) führten:

$$\sum_k S_{R_k}^f - \sum_k S_{C_k}^f + \sum_k S_{r_k}^f - \sum_k S_{g_k}^f = \begin{cases} f, & \text{falls } f \text{ Impedanzfunktion,} \\ -f, & \text{falls } f \text{ Admittanzfunktion,} \\ 0, & \text{falls } f \text{ dimensionslose} \\ & \text{Übertragungsfunktion.} \end{cases} \quad (4.23)$$

Die Summenempfindlichkeiten der Steuerfaktoren spannungsgesteuerter Spannungsquellen und stromgesteuerter Stromquellen erscheinen nicht in der Summe. Negativ-Impedanz-Konverter lassen sich mit diesen Elementen beschreiben. Die Empfindlichkeiten der betreffenden Parameter unterliegen damit nicht den einschränkenden Bedingungen von Gl.(4.23). Gyrationen werden dagegen durch Gl.(4.23) erfaßt, da sie sich z.B. durch zwei spannungsgesteuerte Stromquellen darstellen lassen. Die beiden Steuerfaktoren sind dabei mit dem Gyrationenleitwert identisch, müssen aber als zwei verschiedene Variable behandelt werden. Analog sind die Elemente z_{12} und z_{21} der Impedanzmatrix (sonst gleich $-r$ bzw. r gesetzt) als zwei verschiedene unabhängige Variable aufzufassen.

Die zweite Summengleichung für Empfindlichkeiten Gl.(1.31) gilt auch für aktive Netzwerke unverändert, wie sich aus der Herleitung sofort ergibt. Speziell für die interessierenden aktiven RC-Netzwerke ist damit immer unabhängig von der Anzahl der aktiven Elemente und der Art der Netzwerkfunktion (ausschließlich Impedanz-, Admittanz- oder Übertragungsfunktion)

$$\sum_k S_{c_k}^f = S_p^f. \quad (4.24)$$

Ähnliche Beziehungen lassen sich auch für die nachfolgend verwendeten Q - und ω -Empfindlichkeiten aufstellen. (Zur Definition siehe Abschnitt 1.2). Betrachtet wird ein RC-Netzwerk, dessen gesteuerte Quellen durch die Widerstandsgrößen r_k bzw. die dimensionslosen Parameter K_k beschrieben werden.

Die Güte $Q=Q(R_k, C_k, K_k, r_k)$ stellt eine vom Frequenzparameter p unabhängige Größe dar. Da Q dimensionslos ist, muß der Ausdruck für Q in Abhängigkeit von den Netzwerkparametern im Zähler und Nenner die gleiche Dimension besitzen. Bezeichnet man mit $[\bar{R}]$ die Dimension der ohmschen Parameter R_k und r_k , so gilt

$$[Q] = \frac{[\bar{R}]^n [C]^m}{[\bar{R}]^m [C]^n}. \quad (4.25)$$

Bildet man jetzt die Summe der vollrelativen Empfindlichkeiten von Q bezüglich aller ohmschen Parameter, so ergibt sich nach einer analogen Überlegung wie bei Gl.(1.29)

$$\sum_k \bar{S}_{R_k}^Q + \sum_k \bar{S}_{r_k}^Q = 0. \quad (4.26a)$$

Ein entsprechendes Vorgehen liefert für die Summenempfindlichkeiten bezüglich der Kapazitäten

$$\sum_k \bar{S}_{C_k}^Q = 0. \quad (4.26b)$$

Für ω_0 ist zunächst $[\omega_0] = 1/\text{sec}$, so daß für den allgemeinen Ausdruck von ω_0 in Abhängigkeit von den Netzwerkparametern gilt

$$[\omega_0] = \frac{[\bar{R}]^n [C]^m}{[\bar{R}]^{m+1} [C]^{n+1}}. \quad (4.27)$$

Die vollrelativen Summenempfindlichkeiten von ω_0 bezüglich der ohmschen Parameter bzw. der Kapazitäten ergeben sich dann nach denselben Überlegungen wie bei Gl.(1.29) zu

$$\sum_k \bar{S}_{R_k}^{\omega_0} + \sum_k \bar{S}_{C_k}^{\omega_0} = -1, \quad (4.28)$$

$$\sum_k \bar{S}_{C_k}^{\omega_0} = -1. \quad (4.29)$$

Die vorstehenden Gleichungen werden bei der anschließenden Diskussion über empfindlichkeitsoptimale RC-Netzwerke (aktiv) eine wesentliche Rolle spielen, da durch sie prinzipielle Grenzen für die Empfindlichkeiten festgesetzt werden. Zu beachten ist dabei, daß die Gln.(4.25-29) keine Aussagen über die Empfindlichkeiten der dimensionslosen Größen K_k (Verstärkungsfaktoren) enthalten.

4.3 Grundsätzliche Bemerkungen zur Synthese von aktiven RC-Netzwerken mit gutem Empfindlichkeitsverhalten

4.3.1 Die Gesamtempfindlichkeit eines aktiven Netzwerks

Die Gesamtempfindlichkeit eines Netzwerks, das eine bestimmte Netzwerkfunktion realisiert, soll nach Abschnitt 2.1 ein Maß sein, in dem die Einflüsse aller Parameter auf die untersuchte Netzwerkfunktion zusammengefaßt sind. Bei der Diskussion dieses Problems wurde als geeignetes Kriterium die Dispersion

$$\sigma_f^2 \approx \sum_k (S_{x_k}^f)^2 t_k^2 \quad (4.30)$$

der reellen Netzwerkfunktion f vorgeschlagen.

Wie bereits erwähnt, setzt eine Verwendung von Gl.(4.30) die Kenntnis der Toleranzparameter t_k voraus. Für grundlegende Empfindlichkeitsuntersuchungen an passiven RLC-Netzwerken wurden diese Größen alle gleich Eins gesetzt, woraus Φ^f als Empfindlich-

keitsmaßstab entstand. Bei aktiven RC-Netzwerken treten Schwierigkeiten auf, da neben passiven Elementen abgeleitete Größen wie Verstärkungs- oder Konversionsfaktoren betrachtet werden müssen. Diesem Problem, das bei grundlegenden Erörterungen unvermeidbar ist, wird im folgenden dadurch entsprochen, daß bei Beispielen stets der Gesamteinfluß der passiven und aktiven Elemente getrennt voneinander aufgeführt wird. Wesentlich ist, daß erst eine geeignete Kombination beider Beiträge die Gesamttempfindlichkeit eines Netzwerks richtig wiedergibt. Dieser Umstand wurde in der Literatur bisher nicht genügend beachtet. Der Schwerpunkt der Untersuchungen lag meist bei der Empfindlichkeit der aktiven Parameter, während die Empfindlichkeiten der passiven Elemente keine Bedeutung fanden oder nur am Rande erwähnt wurden [27,29-33]. Das ist insofern verständlich, als z.B. die Erfüllung von Toleranzforderungen bei Verstärkungsfaktoren ein bedeutend größeres Problem darstellen kann (und damit deren Empfindlichkeiten wichtiger sind) als Genauigkeitsanforderungen an passive Elemente.

Es lassen sich aber leicht Netzwerke finden, bei denen der Beitrag der passiven Elemente zur Gesamttempfindlichkeit zumindest ebenso groß ist wie der Beitrag der aktiven Parameter.

Als erstes könnte hier das Ersatznetzwerk für einen NIC nach Bild 77b angeführt werden. Die zugehörigen Empfindlichkeiten zeigen, daß für genügend großen Verstärkungsfaktor μ nur noch die Empfindlichkeiten bezüglich der beiden Ohmwiderrstände wesentlich sind.

Als zweites Beispiel dient das Netzwerk in Bild 80, das aus zwei Ohmwiderrständen und einer spannungsgesteuerten Spannungsquelle mit einem sehr hohen Verstärkungsfaktor $\mu \gg 1$ (praktisch realisiert durch einen Operationsverstärker) besteht.

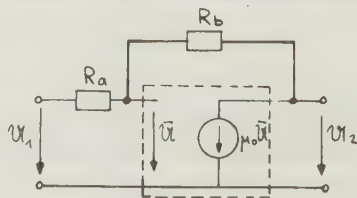


Bild 80

Als näherungsweiser Ausdruck für den Verstärkungsfaktor des Gesamtnetzwerks ergibt sich dann [46] :

$$\mu = U_2/U_1 \approx - \frac{R_b}{R_a} \left(1 - \frac{1}{\mu_o \beta} \right) \quad \text{mit} \quad \beta \approx \frac{R_a}{R_a + R_b} . \quad (4.31)$$

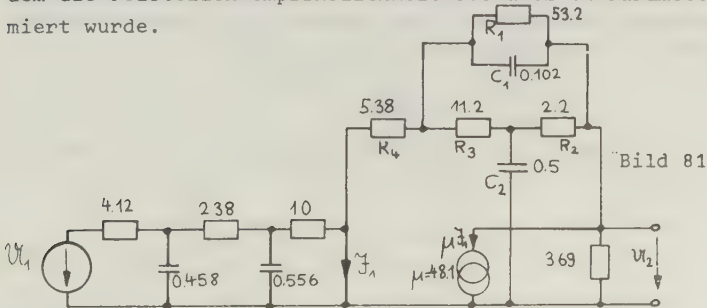
Ein realistischer Wert für μ_o (entspricht der Leerlaufverstärkung des Operationsverstärkers) im niederfrequenten Bereich wäre $\mu_o \approx 10^4 - 10^5$. Damit ergibt sich z.B. mit $\beta \approx 0.1$

$$\mu \approx - \frac{R_b}{R_a} (1 - 10^{-6}) . \quad (4.32)$$

Man sieht, daß der Verstärkungsfaktor μ des Gesamtnetzwerks praktisch ausschließlich durch das Verhältnis der beiden passiven Ohmwidestände R_a und R_b bestimmt wird, während eine Änderung von μ_o um einen Faktor 10 noch keinen merklichen Einfluß hat. Die Empfindlichkeit des Verstärkungsfaktors μ wird daher im wesentlichen durch die Empfindlichkeiten der passiven Elemente bestimmt.

Die beiden Beispiele haben gezeigt, daß die Empfindlichkeiten aktiver Parameter durchaus von der Größenordnung der Empfindlichkeiten passiver Netzwerkelemente sein können. Die Verwendung von Φ^f als Empfindlichkeitsmaßstab dürfte damit einigermaßen sinnvoll sein.

Nach diesen Ausführungen ist es verständlich, daß ein Optimierverfahren, das für eine Netzwerkfunktion die Empfindlichkeit eines aktiven Parameters minimiert, zumindest fraglich erscheint, wenn nicht auch die passiven Elemente berücksichtigt werden. Das sei an einem Beispiel von HAKIM [30] demonstriert (Bild 81), bei dem die Polstellenempfindlichkeit des aktiven Parameters minimiert wurde.



Das Netzwerk realisiert die Tiefpaßfunktion

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{A}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

Die Lage der Polstellen $p_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm j)$ hängt nur vom Verstärkungsfaktor μ und den Elementen im Rückkopplungszweig des Netzwerks ab. Wählt man die Fertigungstoleranzen für die Kapazitäten, Widerstände und den Verstärkungsfaktor zu $\pm 5 \cdot 10^{-3}$, $\pm 2 \cdot 10^{-4}$, $\pm 2 \cdot 10^{-4}$ [34], erhält man für die Polempfindlichkeiten bezüglich p_1 die in der Tabelle angegebenen Werte.

X_i	$S_{X_i}^{p_1}$	$\pm \frac{\Delta X_i}{X_i}$	$\Delta p_1 = \frac{\partial p_1}{\partial X_i} \Delta X_i$
μ	$0.03 + j0.067$	$\pm 2 \cdot 10^{-4}$	$\pm (0.6 + j1.3) \cdot 10^{-5}$
C_1	$0.16 - j0.51$	} $\pm 5 \cdot 10^{-3}$	$\pm (0.8 - j2.5) \cdot 10^{-3}$
C_2	$0.51 - j0.15$		$\pm (0.3 - j0.08) \cdot 10^{-2}$
R_1	$0.09 - j0.04$	} $\pm 2 \cdot 10^{-4}$	$\pm (0.18 - j0.08) \cdot 10^{-4}$
R_2	$0.47 - j0.15$		$\pm (0.9 - j0.3) \cdot 10^{-4}$
R_3	$0.1 - j0.45$		$\pm (0.2 - j0.9) \cdot 10^{-4}$
R_4	$0.01 - j0.03$		$\pm (0.2 - j0.5) \cdot 10^{-5}$

Mit aufgeführt sind die maximalen Polschwankungen, wobei die obigen Toleranzen zugrunde gelegt wurden. Es ist offensichtlich, daß eine Minimierung der Empfindlichkeit des aktiven Parameters nicht genügt und die passiven Elemente einen wesentlichen Einfluß auf die betrachtete Netzwerkfunktion besitzen können.

Ein weiteres Beispiel für die Bedeutung der passiven Elemente im Hinblick auf das Empfindlichkeitsverhalten ist die in Bild 82 angegebene Bandpaßstruktur von HOLT, LEE [32].

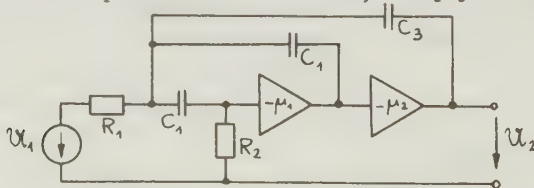


Bild 82

Bei diesem Netzwerk erhält man als Ausdruck für ω_0 (zur Definition

von ω_0 siehe Gl.(1.16)) in Abhängigkeit von den Netzwerkparametern

$$\omega_0 = 1/\sqrt{R_1 R_2 (C_3(1-\mu_1 \mu_2) + C_1(1+\mu_1))C_2} . \quad (4.33)$$

Hieraus errechnen sich die vollrelativen Empfindlichkeiten von ω_0 bezüglich der Netzwerkparameter zu

$$-\bar{S}_{C_3}^{\omega_0} = \bar{S}_{R_1}^{\omega_0} = \bar{S}_{R_2}^{\omega_0} = \bar{S}_{C_2}^{\omega_0} = -1/2; \quad \bar{S}_{C_1}^{\omega_0} = -1;$$

$$\bar{S}_{\mu_1}^{\omega_0} = -\bar{S}_{\mu_2}^{\omega_0} = -1/2.$$

Damit wird

$$\Phi^{\omega_0} = \sum_i \bar{S}_{\text{passiv}}^{\omega_0 2} + \sum_i \bar{S}_{\text{aktiv}}^{\omega_0 2} = 2 + \frac{1}{2} . \quad (4.34)$$

Der Gesamtbeitrag der passiven Elemente zu Φ^{ω_0} ist also viermal so groß wie der Beitrag der beiden aktiven Parameter. Ähnliche Ergebnisse erhält man bei der Untersuchung der Polgüte Q.

4.3.2 Verhalten der Gesamtempfindlichkeit bei Aufspalten einer Übertragungsfunktion in Teilfunktionen zweiten Grades

Die im letzten Abschnitt gebrachten Beispiele für aktive RC-Netzwerke realisierten ausnahmslos Übertragungsfunktionen zweiten Grades. Die große Bedeutung dieser Netzwerke ergibt sich zum Teil daraus, daß die Realisierungen von Übertragungsfunktionen zweiten Grades mit oder ohne Trennverstärker kaskadenförmig zusammengeschaltet werden können. Hieraus erhält man ein sehr einfaches Synthesekonzept, da nur noch jeweils die Werte der Netzwerkelemente für eine vorgegebene Grundstruktur berechnet werden müssen. Außerdem können dann die einzelnen Übertragungspol- und -nullstellen getrennt voneinander abgeglichen werden. Auch vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus wird sich zeigen, daß eine Aufspaltung der Übertragungsfunktion in Teilfunktionen zweiten Grades sinnvoll ist. Im Anschluß daran wird die Frage diskutiert, wie eine solche Aufspaltung durch geeignete Zusammenfassung der Pol- und Nullstellen vorzunehmen ist, damit eine niedrige Gesamtempfindlichkeit resultiert.

Es sei nun eine Übertragungsfunktion mit komplexen Polstellen von der folgenden Form gegeben:

$$f(p) = Z(p)/N(p) = \prod_{\nu=1}^m Z_{\nu} / \prod_{\mu=1}^m N_{\mu}, \quad (4.35)$$

$$Z_{\nu} = a_{\nu} p^2 + b_{\nu} p + c_{\nu}; \quad N_{\mu} = p^2 + 2\sigma_{\mu} p + \omega_{\mu}^2. \quad (4.36)$$

Teilübertragungsfunktionen mit reellen Polstellen bleiben in $f(p)$ unberücksichtigt, da sich die entsprechenden Netzwerke rein passiv ausführen lassen.

Es sollen nun zwei äquivalente Realisierungen von $f(p)$ verglichen werden, die jeweils die gleiche Zahl z an Elementen enthalten mögen. Netzwerk 1 sei "en-bloc" realisiert, während Netzwerk 2 eine Kaskadenschaltung von m Übertragungsfunktionen zweiten Grades darstellen möge. Der Einfachheit halber wird angenommen, daß es sich um eine dimensionslose Übertragungsfunktion handelt, zu deren Realisierung ideale Operationsverstärker benutzt wurden. Die Empfindlichkeitsbetrachtungen können damit auf die r Ohmwidestände und die c Kapazitäten ($z = r+c$) beschränkt werden. Wie sich zeigen wird, übt diese Annahme auf den Vergleich keinen entscheidenden Einfluß aus.

Von besonderem Interesse ist die Gesamtempfindlichkeit von f in der Umgebung der Stelle $p=j\omega_0$, wobei $p_0, p_0^* = -\sigma_0 \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \sigma_0^2}$ das Polpaar der Übertragungsfunktion $f(p)$ mit der höchsten Güte ($\sigma_0 \ll \omega_0$) darstellt. (Ist die Voraussetzung $\sigma_0 \ll \omega_0$ nicht erfüllt, dann kann keine allgemeine Aussage mehr gemacht werden). Es wird deshalb für die Netzwerke 1 und 2 die Summe der quadrierten Beiträge der vollrelativen Empfindlichkeiten von f an der Stelle $p=j\omega_0$ berechnet. (Es werden vollrelative Empfindlichkeiten verwendet, da dann die Ergebnisse für das faktorisierte Netzwerk übersichtlicher sind).

Zunächst ist

$$\bar{\Phi}^f = \sum_{k=1}^z |\bar{S}_{x_k}^f|^2. \quad (4.37)$$

Für die vollrelativen Summenempfindlichkeiten gilt außerdem im Fall einer dimensionslosen Übertragungsfunktion f mit den Gln. (1.29, 31)

$$\sum_{k=1}^r \bar{S}_{R_k}^f(p) = \sum_{k=1}^c \bar{S}_{C_k}^f(p) = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{p}{f} = \bar{S}_p^f. \quad (4.38)$$

Eine beliebige Realisierung mit r Ohmwideständen und c Kapazitäten besäße dann minimale Gesamtempfindlichkeit, wenn

$$\bar{S}_{R_k}^f = \bar{S}_p^f / r, \quad p = j\omega_q, \quad k=1, \dots, r, \quad (4.39a)$$

$$\bar{S}_{C_k}^f = \bar{S}_p^f / c, \quad p = j\omega_q, \quad k=1, \dots, c. \quad (4.39b)$$

Für die minimale Gesamtempfindlichkeit von Netzwerk 1 bei $p=j\omega_q$ folgt damit

$$\bar{\Phi}_{1\min}^f(\omega_q) = \frac{|\bar{S}_p^f|^2}{r} + \frac{|\bar{S}_p^f|^2}{c} \Big|_{p=j\omega_q}. \quad (4.40)$$

Bei der Kaskadenschaltung aus m Teilnetzwerken zweiten Grades mit den Teilübertragungsfunktionen f_k gilt zunächst $f = \prod_{k=1}^m f_k$ und hiermit

$$\sum_{k=1}^m \bar{S}_P^{f_k} = \bar{S}_P^f. \quad (4.41)$$

Zur Vereinfachung wird im folgenden ω_q auf den Wert 1 normiert. Außerdem wird angenommen (diese Annahme wird später benötigt), daß in der Nähe von p_q ein weiteres Polpaar p_c , $p_c^* = -\sigma_c \pm j\sqrt{\omega_c^2 - \sigma_c^2}$ mit $\sigma_c \ll 1$ liegen soll und sich in der unmittelbaren Nähe von p_q und p_c keine Nullstelle der Übertragungsfunktion befindet. Wegen

$$\bar{S}_P^{f_\mu} = \frac{\partial Z_r / \partial p}{Z_r} p - \frac{\partial N_r / \partial p}{N_r} p$$

werden dann in einer Umgebung von $p=j\omega_q$ mit $\sigma_q \ll 1$, $\sigma_c \ll 1$ zunächst N_q , $|N_c|$ klein gegenüber $|Z_q|$, $|Z_c|$ sowie gegenüber $|Z_\mu|$, $|N_\mu|$, $\mu \neq q$, $\mu \neq c$, so daß in guter Näherung für $p=j\omega_q$ in Gl.(4.41) nur die Beiträge der μ -ten und τ -ten Teilübertragungsfunktion berücksichtigt werden müssen.

$$\bar{S}_P^{f_\tau} + \bar{S}_P^{f_q} \approx \bar{S}_P^f, \quad p=j\omega_q. \quad (4.42)$$

Wegen der Gln.(4.38,42) werden daher zur Gesamtempfindlichkeit von Netzwerk 2 in der Umgebung von $p=j\omega_q$ im wesentlichen die Elemente des q - und τ -Teilnetzwerks beitragen. Wenn alle Teilnetzwerke dieselbe Struktur besitzen, wird jedes r/m Ohmwidestände und c/m Kapazitäten enthalten. Unter Vernachlässigung der Beiträge aller $k=1, \dots, m$; $k \neq \tau$, $k \neq q$ Teilnetzwerke ergibt sich dann zunächst für die optimalen Einzelempfindlichkeiten des q - und τ -Teilnetzwerks an der Stelle $p=j\omega_q$ unter der Annahme $\bar{S}_P^{f_\tau}(j\omega_q) \approx \bar{S}_P^{f_q}(j\omega_q) \approx \frac{1}{2} \bar{S}_P^f(j\omega_q)$ und wegen Gl.(4.38) genähert:

$$\bar{S}_{R_k}^{f_q} \approx \bar{S}_{R_k}^{f_\tau} \approx \frac{m}{2r} \bar{S}_P^f \Big|_{p=j\omega_q}; \quad \bar{S}_{C_k}^{f_q} \approx \bar{S}_{C_k}^{f_\tau} \approx \frac{m}{2c} \bar{S}_P^f \Big|_{p=j\omega_q}$$

Hieraus folgt dann

$$\bar{\Phi}_{2\min}^f(\omega_q) \approx \sum_{k=1}^{2/m} (|\bar{S}_{R_k}^{f_q}|^2 + |\bar{S}_{C_k}^{f_q}|^2) \approx \frac{m}{2} |\bar{S}_P^f|^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{c} \right) \Big|_{p=j\omega_q}. \quad (4.43)$$

Im optimalen Fall hätte damit die en-bloc Realisierung bei $p=j\omega_0$ wegen Gl.(4.40) unter den obigen Annahmen eine um den Faktor $m/2$ geringere Gesamtempfindlichkeit. Dieses Ergebnis ist verständlich, denn je mehr Netzwerkelemente einen gleich großen Einfluß auf die Netzwerkfunktion f ausüben, desto kleiner wird die Gesamtempfindlichkeit.

Die entscheidende Voraussetzung für diesen Vergleich war die empfindlichkeitsoptimale en-bloc Realisierung einer Übertragungsfunktion höheren Grades. Diese Eigenschaft besitzt jedoch keine der bekannten Netzwerkstrukturen, obwohl von der Theorie her kein Einwand gegen die numerische Gleichheit der Empfindlichkeiten wenigstens an einem Frequenzpunkt erhoben werden kann.

Wie sich im Abschnitt 4.3.3 zeigen wird, existieren selbst für Übertragungsfunktionen zweiten Grades keine von der Struktur her empfindlichkeitsoptimalen Realisierungen. Erst mit zusätzlichen Bedingungsgleichungen an die Netzwerkelemente kann man in bestimmten Fällen gleich große Empfindlichkeiten erhalten. Als Folge davon wird die Klasse der durch die Netzwerkstruktur realisierbaren Funktionen eingeschränkt, und es lassen sich nur noch spezielle Übertragungsfunktionen verwirklichen. Es ist zu erwarten, daß mit wachsendem Grad der Netzwerkfunktion und dementsprechend einer größeren Zahl an Netzwerkelementen diese Bedingungsgleichungen immer komplizierter werden, so daß sich schließlich keine sinnvolle Lösungen mehr finden lassen bzw. zu wenig Freiheitsgrade übrig bleiben, um noch praktisch interessierende Netzwerke damit realisieren zu können.

Im Normalfall werden also weder bei einer en-bloc Realisierung noch bei einer äquivalenten Kaskadenschaltung die Empfindlichkeiten an der Stelle $p=j\omega_0$ alle ihre optimalen Werte annehmen. Unter diesem veränderten Aspekt werden jetzt die Gesamtempfindlichkeiten von Netzwerk 1 und 2 noch einmal untersucht.

Für die vollrelativen Empfindlichkeiten gilt mit $f = Z/N$ allgemein

$$\bar{S}_{x_r}^f = \left(\frac{\partial Z / \partial x_r}{Z} - \frac{\partial N / \partial x_r}{N} \right) x_r, \quad (\text{Netzwerk 1})(4.44)$$

$$\text{bzw.} \quad \bar{S}_{x_{\mu}^{(u)}}^f = \left(\frac{\partial Z_{\mu}}{\partial x_{\mu}^{(u)}} - \frac{\partial N_{\mu}}{\partial x_{\mu}^{(u)}} \right) x_{\mu}^{(u)}, \quad (\text{Netzwerk 2})(4.45)$$

wobei $x_{\mu}^{(u)}$ ein Element aus dem k . Teilnetzwerk bezeichnet. Für $p=j\omega_g$ wird mit Gl.(4.36)

$$|N_g(j\omega_g)| = 2\sigma_g\omega_g \ll 1 \quad (\omega_g=1) \quad (4.46)$$

und damit (falls in der unmittelbaren Nachbarschaft von p_g keine Zählernullstelle liegt)

$$\bar{S}_{x_{\mu}^{(u)}}^f(j\omega_g) \approx -\frac{\partial N_g}{\partial x_{\mu}^{(u)}} x_{\mu}^{(u)} /_{p=j\omega_g} \quad \text{bzw.} \quad \bar{S}_{x_{\mu}^{(g)}}^f(j\omega_g) \approx -\frac{\partial N_g}{\partial x_{\mu}^{(g)}} x_{\mu}^{(g)} /_{p=j\omega_g}. \quad (4.47)$$

Liegt ein weiteres Polpaar p_{τ} , $p_{\tau}^* = -\sigma_{\tau} \pm j\sqrt{\omega_{\tau}^2 - \sigma_{\tau}^2}$ in der Nähe von p_g , dann wird der Betrag von

$$N_{\tau}(j\omega_g) = \omega_{\tau}^2 - \omega_g^2 + 2j\sigma_{\tau}\omega_g, \quad \sigma_{\tau} \ll 1 \quad (4.48)$$

ebenfalls eine kleine Größe. Das hat zur Folge, daß die Empfindlichkeiten für die en-bloc Realisierung

$$\bar{S}_{x_{\mu}^{(u)}}^f(j\omega_g) \approx -\frac{\partial N_g}{\partial x_{\mu}^{(u)}} x_{\mu}^{(u)} /_{p=j\omega_g} \quad (4.49)$$

betragsmäßig sehr groß sein können, während beim faktorisierten Netzwerk die Empfindlichkeiten

$$\bar{S}_{x_{\mu}^{(g)}}^f(j\omega_g) \approx -\frac{\partial N_g}{\partial x_{\mu}^{(g)}} x_{\mu}^{(g)} /_{p=j\omega_g}, \quad \bar{S}_{x_{\mu}^{(u)}}^f(j\omega_g) \approx -\frac{\partial N_{\tau}}{\partial x_{\mu}^{(u)}} x_{\mu}^{(u)} /_{p=j\omega_g} \quad (4.50)$$

durch die Nachbarschaft der Polstellen p_g und p_{τ} nicht beeinflusst werden. Bei der Berechnung der Gesamtempfindlichkeit $\bar{\Phi}^f$ an der Stelle $p=j\omega_g$ müssen deshalb für die en-bloc Realisierung zunächst alle Netzwerkelemente berücksichtigt werden, so daß

$$\bar{\Phi}_1^f(\omega_g) \approx \sum_{k=1}^z \left| \frac{\partial N_g}{\partial x_k} x_k \right|_{p=j\omega_g}^2 \quad (4.51)$$

Beim faktorisierten Netzwerk werden dagegen in erster Linie nur die Elemente aus dem τ . und g . Teilnetzwerk zur Gesamtempfindlichkeit beitragen:

$$\bar{\Phi}_2^f(\omega_g) \approx \sum_{k=1}^z \left| \frac{\partial N_{\tau}}{\partial x_k^{(u)}} x_k^{(u)} \right|^2 + \sum_{k=1}^z \left| \frac{\partial N_g}{\partial x_k^{(g)}} x_k^{(g)} \right|_{p=j\omega_g}^2 \quad (4.52)$$

In Gl.(4.51) steht im Nenner das Produkt der kleinen Größen $|N_{\tau}(j\omega_g)| |N_g(j\omega_g)|$, während im anderen Fall $|N_{\tau}(j\omega_g)|$ bzw. $|N_g(j\omega_g)|$ allein auftritt. Außerdem müssen bei der en-bloc Realisierung zunächst alle Netzwerkelemente berücksichtigt werden, während im zweiten Fall nur $z_{\tau} + z_g \leq z$ Netzwerkelemente wesentlichen Einfluß auf $f(j\omega_g)$ haben. Dazu kommt, daß die Größen $(\partial N / \partial x_k) x_k$ im

Zähler von Gl.(4.51) nicht alle gleich sind und sich möglicherweise auch im Vorzeichen ihrer Real- und Imaginärteile unterscheiden. Es können dadurch betragsgroße Terme in Gl.(4.51) entstehen, weshalb eine Summation mit weniger Gliedern wie in Gl.(4.52) vorzuziehen ist. Auch im allgemeinen Fall, wenn $|N_p(j\omega_q)|$ keine kleine Größe ist, wird aufgrund dieser Tatsache $\Phi_p^f(j\omega_q)$ sehr wahrscheinlich größer sein als die Gesamtempfindlichkeit des faktorisierten Netzwerks.

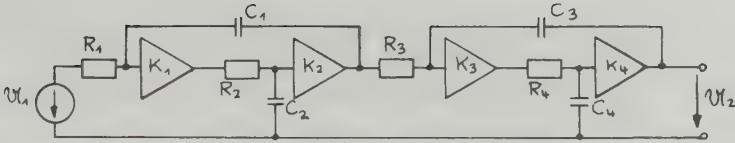
Bei den Ausführungen zu Beginn des Abschnitts bewirkte die Forderung nach der Gleichheit der Empfindlichkeiten (was die Gleichheit der Größen $|S_{x_k}^N|$ bzw. $|S_{x_k}^{N_c}|$, $|S_{x_k}^{N_g}|$ in den Gln.(4.51,52) bedeuten würde), die geringere Gesamtempfindlichkeit einer empfindlichkeitsoptimalen en-bloc Realisierung gegenüber einem faktorisierten empfindlichkeitsoptimalen Netzwerk. Da jedoch keine der bekannten Realisierungsverfahren diese Bedingungen erfüllt, dürfte vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus wegen der oben angeführten Argumente die Realisierung einer Übertragungsfunktion höheren Grades durch Zerlegung in Teilfunktionen zweiten Grades einer en-bloc Realisierung überlegen sein.

Anschaulich läßt sich dieses Ergebnis folgendermaßen interpretieren: Bei einer faktorisierten Realisierung wird durch die Schwankung eines Netzwerkelementes $x_{\mu}^{(\varphi)}$ im φ . Teilnetzwerk nur die Lage des Pols p_φ geändert; die Änderung eines Netzwerkelements in der en-bloc Realisierung ändert jedoch im allgemeinen die Lage mehrerer Pole, was normalerweise auch eine größere Änderung der betrachteten Netzwerkfunktion verursacht.

Daß selbst bei geringer Güte und voneinander entfernten Polstellen eine Faktorisierung vorzuziehen ist, zeigt das folgende Beispiel von zwei äquivalenten Realisierungen eines Butterworth-Tiefpasses vierten Grades.

$$f = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{N} = \frac{1}{p^4 + 2.613p^3 + 3.414p^2 + 2.613p + 1} = \frac{1}{(p^2 + 0.76p + 1)(p^2 + 1.85p + 1)} = \frac{1}{N_1 N_2}.$$

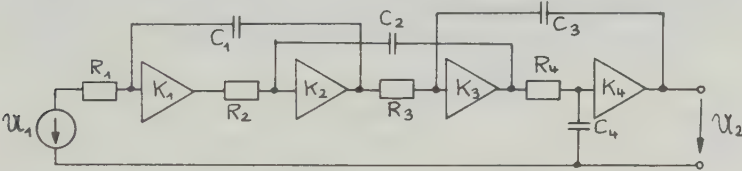
Die beiden Netzwerke (Bild 83a,b) wurden nach einem Verfahren von BACH [34a] realisiert und enthalten jeweils gleich viel aktive und passive Elemente.



faktorisiertes Netzwerk

Bild 83a

$$K_1=K_2=K_3=K_4=1; R_1C_1=1.31; R_2C_2=0.76; R_3C_3=0.54; R_4C_4=1.85$$



en-bloc Realisierung

Bild 83b

$$K_1=K_2=K_3=K_4=1; R_1C_1=0.38; R_2C_2=0.76; R_3C_3=1.31; R_4C_4=2.61.$$

Für die vollrelativen Empfindlichkeiten bezüglich f ergibt sich:

	faktorisiertes Netzwerk	en-bloc Realisierung
$\bar{S}_{R_1}^f = \bar{S}_{C_1}^f$	$-\frac{1}{N} (N_2 p^2)$	$-\frac{1}{N} (p^4)$
$\bar{S}_{R_2}^f = \bar{S}_{C_2}^f$	$-\frac{1}{N} (N_2 (p^2 + 0.76p))$	$-\frac{1}{N} (p^4 + 2.61p^3)$
$\bar{S}_{R_3}^f = \bar{S}_{C_3}^f$	$-\frac{1}{N} (N_1 p^2)$	$-\frac{1}{N} (p^4 + 2.61p^3 + 3.41p^2)$
$\bar{S}_{R_4}^f = \bar{S}_{C_4}^f$	$-\frac{1}{N} (N_1 (p^2 + 1.85p))$	$-\frac{1}{N} (p^4 + 2.61p^3 + 3.41p^2 + 2.61p)$
$\bar{S}_{K_1}^f$	$\frac{1}{N} (N_2 (p^2 + 2.07p + 1))$	$\frac{1}{N} (p^4 + 4.7p^3 + 6.7p^2 + 3.8p + 1)$
$\bar{S}_{K_2}^f$	$\frac{1}{N} (N_2 (p^2 + 2.07p + 1))$	$\frac{1}{N} (p^4 + 3.8p^3 + 6.7p^2 + 4.7p + 1)$
$\bar{S}_{K_3}^f$	$\frac{1}{N} (N_1 (p^2 + 2.4p + 1))$	$\frac{1}{N} (p^4 + 3p^3 + 4.4p^2 + 3.9p + 1)$
$\bar{S}_{K_4}^f$	$\frac{1}{N} (N_1 (p^2 + 2.4p + 1))$	$\frac{1}{N} (p^4 + 3.9p^3 + 4.4p^2 + 3p + 1)$

Bild 84 zeigt den Verlauf von $\bar{\Phi}_{\text{en-bloc}}^f / \bar{\Phi}_{\text{fakt.}}^f$ für $0 < \omega < 3$. Wie man der Abbildung entnimmt, ist das faktorisierte Netzwerk der en-bloc Realisierung stets überlegen. An der Stelle $p=j$ erhält man speziell für das faktorisierte Netzwerk:

$$\bar{\Phi}(j) = \sum_{v, \text{passiv}} |\bar{S}_{x_k}|^2 + \sum_{v, \text{aktiv}} |\bar{S}_{x_k}|^2 = 12 + 17 = 29,$$

für die en-bloc Realisierung dagegen

$$\bar{\Phi}(j) = \sum_{v, \text{passiv}} |\bar{S}_{x_k}|^2 + \sum_{v, \text{aktiv}} |\bar{S}_{x_k}|^2 = 27 + 29 = 56.$$

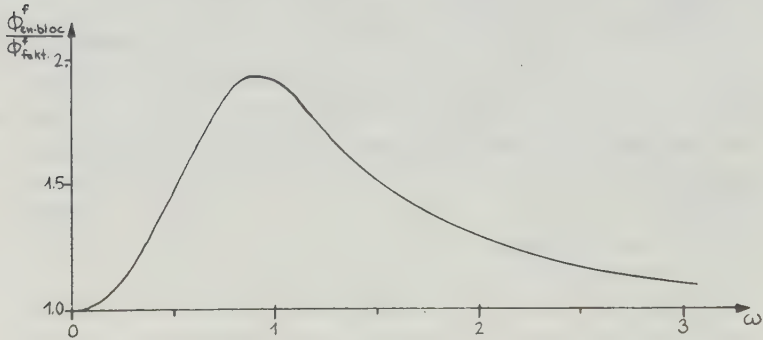


Bild 84

Das faktorisierte Netzwerk besitzt also für $p=j$ nur die halbe Gesamtempfindlichkeit wie die en-bloc Realisierung. Außerdem sieht man, daß in beiden Fällen der Gesamteinfluß der passiven und aktiven Elemente von gleicher Größenordnung ist.

Die bisherigen Betrachtungen sollten zeigen, warum die Faktorisierung einer Übertragungsfunktion höheren Grades einer en-bloc Realisierung vorzuziehen ist. Als nächstes stellt sich die Frage, wie diese Faktorisierung durchzuführen ist, d.h. wie die gegebenen Pole und Nullstellen zu Teilfunktionen zusammengefaßt werden müssen, damit eine geringe Empfindlichkeit des Gesamtnetzwerks resultiert. Mit Hilfe der Gleichungen über die Summenempfindlichkeiten läßt sich das Problem allgemein erörtern.

Gegeben sei eine Übertragungsfunktion $f(p)$:

$$f(p) = \prod_{\mu=1}^n f_{\mu}(p). \quad (4.53)$$

Dabei bleiben wie schon in Gl.(4.35) Teilübertragungsfunktionen mit reellen Polstellen unberücksichtigt, da sich solche Funktionen in Form reiner RC-Netzwerke verwirklichen lassen. Die $f_{\mu}(p)$ seien Teilfunktionen zweiten Grades von der allgemeinen

Form
$$f_{\mu}(p) = \frac{a_{\mu} p^2 + b_{\mu} p + c_{\mu}}{p^2 + 2\sigma_{\mu} p + \omega_{\mu}^2} \quad (4.54)$$

Mit $f(p)$ ist auch $\bar{S}_p^{|\mathbf{f}|^2}$ fest gegeben. Es gilt dann

$$\sum_{\mu=1}^n \bar{S}_p^{|\mathbf{f}|^2} = \bar{S}_p^{|\mathbf{f}|^2} \quad (4.55)$$

Betrachtet man ein Netzwerk aus Ohmwideständen, Kapazitäten und gesteuerten Quellen mit dimensionslosen Steuerfaktoren, so folgt mit den Gl.n.(1.32,33) für die vollrelativen Summenempfindlichkeiten, wenn die Teilübertragungsfunktionen f_{κ} ($\kappa=1, \dots, n$) dimensionslos sind:

$$\sum_{\mu=1}^n \bar{S}_{R_{\mu}}^{|\mathbf{f}_{\kappa}|^2} = \sum_{\mu=1}^n \bar{S}_{C_{\mu}}^{|\mathbf{f}_{\kappa}|^2} = \bar{S}_p^{|\mathbf{f}_{\kappa}|^2} \quad (4.56)$$

Die Gesamtempfindlichkeit $\bar{\Phi}^{|\mathbf{f}|^2}$ wird klein, wenn die Netzwerkelemente jeweils einen annähernd gleich großen Beitrag liefern. Nimmt man an, daß die Teilnetzwerke zweiten Grades alle dieselbe Struktur besitzen und damit gleich viel Elemente enthalten, so bedeutet die Forderung nach geringer Gesamtempfindlichkeit $\bar{\Phi}^{|\mathbf{f}|^2}$ wegen Gl.(4.56) und mit $\bar{S}_{x_{\mu}^{(u)}}^{|\mathbf{f}_{\kappa}|^2} = \bar{S}_{x_{\mu}^{(u)}}^{|\mathbf{f}_{\kappa}|^2}$, daß alle Ausdrücke $\bar{S}_p^{|\mathbf{f}_{\kappa}|^2}$ möglichst von gleicher Größenordnung sein müssen. Eine exakte Gleichheit läßt sich normalerweise nicht erzielen, da die Null- und Polstellen von $f(p)$ in der Regel voneinander verschieden sind.

Von besonderem Interesse ist das Teilnetzwerk, das das Polpaar $p_{\mu}, p_{\mu}^* = -\sigma_{\mu} \pm j\sqrt{\omega_{\mu}^2 - \sigma_{\mu}^2}$ mit der höchsten Polgüte realisiert. In diesem Fall sei $\sigma_{\mu} \ll \omega_{\mu}$. Wie Bild 85 zeigt, wachsen mit zunehmendem Abstand zwischen p_{μ} und der entsprechenden Nullstelle z_{μ} (die in diesem Beispiel auf der imaginären Achse liegt), auch die Werte von $\frac{\partial |f_{\mu}|^2}{\partial \omega} \frac{\omega}{|f_{\mu}|^2}$ in der Umgebung von ω_{μ} .

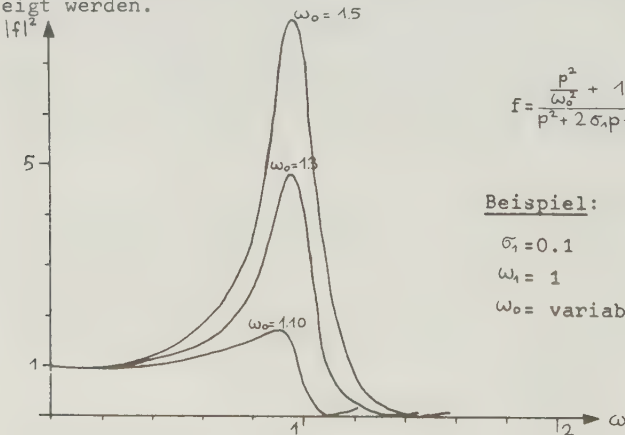
Große Werte von $\bar{S}_{\omega}^{|\mathbf{f}_{\mu}|^2}$ bedeuten zunächst, daß dann in der Umgebung von ω_{μ} in Gl.(4.55) mit $p=j\omega$ bei gegebenem $\bar{S}_{\omega}^{|\mathbf{f}|^2}$ der Term $\bar{S}_{\omega}^{|\mathbf{f}_{\mu}|^2}$ überwiegt. Entsprechend wird daher $\bar{\Phi}^{|\mathbf{f}|^2}$ in der Umgebung von ω_{μ} im wesentlichen durch die Elemente des μ -ten Teilnetzwerks bestimmt. Das widerspricht aber der Forderung, daß alle Parameter möglichst gleichmäßig die Netzwerkfunktion beeinflussen sollen. Es ergibt sich damit, daß in der Regel der Pol mit der höchsten Güte zusammen mit der am nächsten liegenden Nullstelle realisiert werden sollte. Für die Gruppierung der restlichen Pole und

Nullstellen gilt allgemein, daß im interessierenden Frequenzbereich die Ausdrücke $\bar{S}_p^{161^2}$ von möglichst gleicher Größenordnung sind.

Das vorstehende Resultat wurde aufgrund theoretischer Überlegungen gewonnen. Für eine Teilfunktion f_μ , die das Polpaar $p_\mu, p_\mu^* = -\sigma_\mu \pm j\sqrt{\omega_\mu^2 - \sigma_\mu^2}$, $\sigma_\mu \ll \omega_\mu$ realisiert, können sich aber sämtliche Empfindlichkeiten

$$\bar{S}_{X_k^{(\mu)}}^{161^2} = 2|f_\mu| \left(\frac{\partial |Z_\mu| / \partial X_k^{(\mu)}}{|Z_\mu|} X_k^{(\mu)} - \frac{\partial |N_\mu| / \partial X_k^{(\mu)}}{|N_\mu|} X_k^{(\mu)} \right) \quad (4.57)$$

für $p=j\omega_\mu$ als Differenz zweier großer Terme ergeben, wenn Pol- und Nullstellen von f_μ nahe beieinander liegen; denn sowohl $Z_\mu(j\omega_\mu)$ als auch $|N_\mu(j\omega_\mu)|$ sind kleine Größen. Ob die Empfindlichkeiten klein werden, kann damit erst anhand der jeweiligen Netzwerkstruktur untersucht werden. Daß es möglich ist, annehmbare Empfindlichkeiten zu erhalten, soll an einem Beispiel gezeigt werden.



$$f = \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 1}{p^2 + 2\sigma_1 p + \omega_1^2}$$

Beispiel:

$$\sigma_1 = 0.1$$

$$\omega_1 = 1$$

$$\omega_0 = \text{variabel}$$

Bild 85

Betrachtet wird die Netzwerkfunktion

$$f = K \frac{p^2 + \alpha p + 1}{p^2 + \gamma p + 1} \quad (4.58)$$

mit gegebenem γ und α als Parameter. Anhand der Gesamtempfindlichkeit Φ^f soll das Verhalten des Netzwerks für verschiedene Werte von α untersucht werden. Die verwendete Netzwerkkonfiguration zeigt Bild 86 [36].

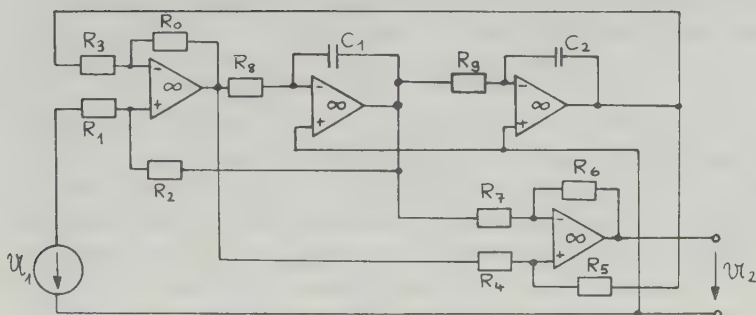


Bild 86

Für die Übertragungsfunktion $f = U_2/U_1$ ergibt sich in Abhängigkeit von den Netzwerkelementen, wenn man die auftretenden Operationsverstärker als ideale Elemente mit unendlicher Leerlaufverstärkung behandelt

$$f = \frac{R_2(R_0 + R_3) \{ R_5(R_6 + R_7) R_8 C_1 R_9 C_2 p^2 + (R_4 + R_5) R_6 R_9 C_2 p + R_4(R_6 + R_7) \}}{R_7(R_4 + R_5) \{ R_3(R_1 + R_2) R_8 C_1 R_9 C_2 p^2 + (R_0 + R_3) R_1 R_9 C_2 p + R_0(R_1 + R_2) \}} \quad (4.59)$$

Unter der Voraussetzung

$$R_0 = R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1, \quad R_8 C_1 = R_9 C_2 = 1, \quad R_2 = x, \quad R_7 = \beta$$

vereinfacht sich Gl.(4.59) zu

$$f = \frac{x}{\beta} \frac{p^2 + \frac{2}{1+\beta} p + 1}{p^2 + \frac{2}{1+x} p + 1} \quad (4.60)$$

Für die vollrelativen Empfindlichkeiten von f an der Stelle $p=j$ erhält man damit:^{*)}

$$\bar{S}_{R_0}^f = -\bar{S}_{R_3}^f = -\frac{j}{2}(1+x), \quad \bar{S}_{R_4}^f = -\bar{S}_{R_2}^f = -1, \quad \bar{S}_{R_6}^f = -\bar{S}_{R_5}^f = -\frac{j}{2}(1+\beta), \\ \bar{S}_{R_7}^f = -\bar{S}_{R_1}^f = +1, \quad \bar{S}_{R_8}^f = \bar{S}_{C_1}^f = \bar{S}_{R_9}^f = \bar{S}_{C_2}^f = \frac{j}{2}(\beta-x).$$

Die Gesamttempfindlichkeit $\bar{\Phi}^f(1)$ errechnet sich hieraus zu

$$\bar{\Phi}^f(1) = 2 + \frac{(1+x)^2}{2} + \frac{(1+\beta)^2}{2} + (\beta-x)^2. \quad (4.61)$$

Man sieht, zu gegebenem x wird $\bar{\Phi}^f(1)$ klein, wenn $\beta \approx x$, Pol- und Nullstelle also nahe beieinander liegen. Das exakte Minimum von $\bar{\Phi}^f(1)$ wird zwar für $\beta = (2x-1)/3$ erreicht, was aber auf die spezielle Form der Übertragungsfunktion Gl.(4.58) zurückzuführen

^{*)}Ähnliche Ergebnisse erhält man wegen Gl.(2.11) sowie unter Berücksichtigung von $f(j) = \frac{x(1+x)}{\beta(1+\beta)}$ für die Empfindlichkeiten von $|f|^2$.

ist. Für die vollrelativen Summenempfindlichkeiten der Kapazitäten und Ohmwidstände gilt bei $p=j$:

$$\sum_{\mu} \bar{S}_{C_{\mu}}^f = \sum_{\nu} \bar{S}_{R_{\nu}}^f = \bar{S}_p^f / p = j(\beta - x). \quad (4.62)$$

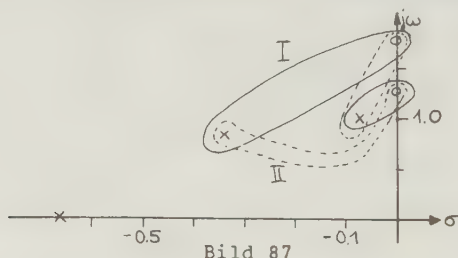
Für $\beta \rightarrow x$ geht dieser Ausdruck gegen Null. Bei der verwendeten Netzwerkconfiguration wird die Gl.(4.62) dadurch erfüllt, daß die meisten Empfindlichkeiten entgegengesetzt gleich groß sind.

Ein solches Verhalten war zu erwarten, denn es ist physikalisch verständlich, daß mit $\beta \rightarrow x$ in der Regel nicht sämtliche Empfindlichkeiten $\bar{S}_{R_{\nu}, C_{\mu}}^f$ gegen Null gehen. Die Angabe einer allgemeinen unteren Schranke für die Beträge der Empfindlichkeiten erscheint jedoch nicht möglich.

Als nächstes wird noch ein Beispiel gebracht, das die Bedeutung der richtigen Gruppierung von Pol- und Nullstellen anhand des Unterschieds in der Gesamtempfindlichkeit verdeutlichen soll. Betrachtet wird ein Cauer-Tiefpaß 5. Grades mit der folgenden Übertragungsfunktion:

$$f = U_2 / U_1 = K \frac{(p^2 + 1.578)(p^2 + 3.129)}{(p + 0.659)(p^2 + 0.477p + 1.081)(p^2 + 0.691p + 0.8)} \quad (4.63)$$

Die Lage der Pol- und Nullstellen mit positivem Imaginärteil zeigt Bild 87.

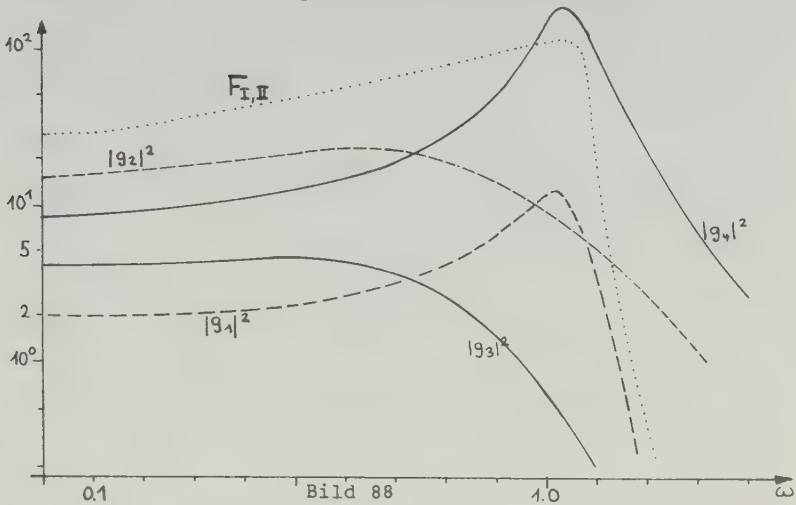


Läßt man den Pol auf der negativ reellen Achse als für einen Vergleich uninteressant außer acht, so verbleiben für eine Gruppierung die Möglichkeiten I und II, die Bild 87 angedeutet sind. Es werden nun die reellen Funktionen

$$F_I(\omega) = g_1 g_2 = K \frac{(1.58 - \omega^2)^4}{(1.08 - \omega^2)^2 + 0.021\omega^2} \cdot \frac{(3.13 - \omega^2)^2}{(0.8 - \omega^2)^2 + 0.48\omega^2}, \quad (4.64)$$

$$F_{II}(\omega) = g_3 g_4 = K \frac{(1.58 - \omega^2)^2}{(0.8 - \omega^2)^2 + 0.48\omega^2} \cdot \frac{(3.13 - \omega^2)^2}{(1.08 - \omega^2)^2 + 0.021\omega^2} \quad (4.65)$$

untersucht. Bild 88 zeigt den Verlauf dieser Funktionen.



Die vier einzelnen Teilfunktionen zweiten Grades f_m mit $|f_m|^2 = g_m$ werden mit der in Bild 86 dargestellten Netzwerkkonfiguration realisiert. Um die Nullstellen auf der imaginären Achse zu erhalten, wird $R_6 = 0$ gesetzt; außerdem ist $R_8 = R_9 = C_1 = C_2 = 1$. Die übrigen Netzwerkelemente besitzen die in der Tabelle angegebenen Werte. R_7 kann beliebig gewählt werden und tritt in der Übertragungsfunktion nicht mehr auf.

Netzwerkelemente für die einzelnen Teilfunktionen:

	g_1	g_2	g_3	g_4
R_0	0.5022	0.4927	0.4927	0.5022
R_1	0.1524	0.6238	0.6238	0.1524
R_2	2.0	1.0	1.0	2.0
R_3	0.4646	0.6158	0.6158	0.4646
R_4	1.1835	0.8398	0.6785	1.4653
R_5	0.7501	0.2684	0.43	0.4683

Für den konstanten Faktor K in den Gln.(4.64,65) erhält man in beiden Fällen $K = 0.2$. Für die vollrelativen Empfindlichkeiten der Teilfunktionen g_m ergibt sich allgemein:

$$\bar{S}_{R_0}^{\mu} = -\bar{S}_{R_3}^{\mu}; \quad \bar{S}_{R_1}^{\mu} = -\bar{S}_{R_2}^{\mu}; \quad \bar{S}_{R_4}^{\mu} = -\bar{S}_{R_5}^{\mu}; \quad \bar{S}_{C_1}^{\mu} = \bar{S}_{R_8}^{\mu}; \quad \bar{S}_{R_9}^{\mu} = \bar{S}_{C_2}^{\mu}, \quad \mu=1, \dots, 4.$$

Man sieht, daß die sich aus den Summenempfindlichkeiten ergebende Bedingung

$$\sum_i \bar{S}_{R_i}^{q\mu} = \sum_j \bar{S}_{C_j}^{q\mu} \quad \mu=1, \dots, 4 \quad (4.66)$$

stets erfüllt wird. Für die beiden Realisierungen wurden nun die Gesamtempfindlichkeiten

$$\bar{\Phi}^{F_I} = \sum_i (\bar{S}_i^{q1})^2 + \sum_j (\bar{S}_j^{q2})^2 \quad (4.67)$$

und

$$\bar{\Phi}^{F_{II}} = \sum_i (\bar{S}_i^{q3})^2 + \sum_j (\bar{S}_j^{q4})^2 \quad (4.68)$$

im interessierenden Frequenzbereich berechnet und die prozentuale Abweichung von $\bar{\Phi}^{F_{II}}$ gegenüber $\bar{\Phi}^{F_I}$ im Bild 89 aufgetragen. Man findet bestätigt, daß die Realisierung I überwiegend eine geringere Gesamtempfindlichkeit aufweist (speziell bei $\omega=1$), es sich also empfiehlt, benachbarte Pol- und Nullstellen zusammenzufassen. Obwohl es sich keineswegs um ein kritisches Beispiel handelt, ergeben sich in der Gesamtempfindlichkeit Unterschiede bis zu 86%.

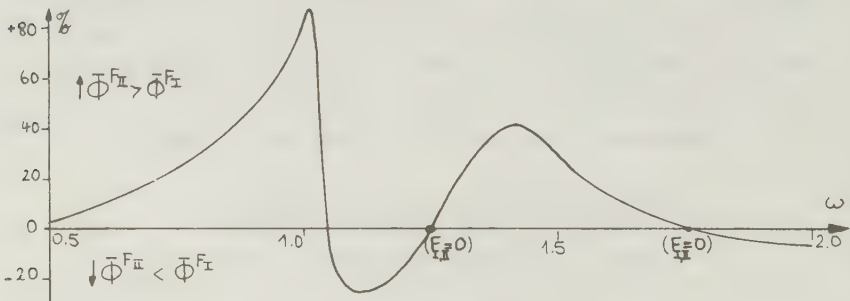


Bild 89

Am Kurvenverlauf in Bild 89 fällt auf, daß an den Nullstellen von $F_{I,II}$ ($\omega=\pm 1.2561$ und $\omega=\pm 1.7689$) $\bar{\Phi}^{F_I} = \bar{\Phi}^{F_{II}}$ gilt und ein Übergang von $\bar{\Phi}^{F_I} > \bar{\Phi}^{F_{II}}$ zu $\bar{\Phi}^{F_I} < \bar{\Phi}^{F_{II}}$ bzw. umgekehrt stattfindet. Ein ähn-

liches Verhalten war bereits früher für bestimmte Reaktanznetzwerke beobachtet worden. Es muß daher geklärt werden, unter welchen Voraussetzungen dieser Effekt auch bei aktiven Netzwerken beobachtet werden kann.

Zu diesem Zweck werden zunächst zwei äquivalente Realisierungen I und II z.B. einer Spannungsübertragungsfunktion höheren Grades betrachtet, die beide als Kaskadenschaltung entsprechender Teilnetzwerke zweiten Grades realisiert sein sollen. Für alle Teilnetzwerke soll dabei dieselbe aktive RC-Struktur (die beliebige Spannungsübertragungsfunktionen zweiten Grades zu realisieren vermag) verwendet werden. Im folgenden interessiert ein Vergleich der Empfindlichkeiten bezüglich der Netzwerkelemente an einer Nullstelle $p_0 = j\omega_0$ von $f(p)$. Sei nun für Netzwerk I

$$f(p) = f_1^{(I)}(p) f_2^{(I)}(p) = \frac{Z_1^{(I)}(p)}{N_1^{(I)}(p)} \frac{Z_2^{(I)}(p)}{N_2^{(I)}(p)} \quad (4.65a)$$

so gruppiert, daß $Z_1^{(I)}$ der Zähler der Teilübertragungsfunktion zweiten Grades mit $Z_1^{(I)}(p_0) = 0$ ist, während in $f_2^{(I)}(p)$ die restlichen Teilfunktionen zweiten Grades zusammengefaßt sind. Analog gelte für Netzwerk II

$$f(p) = f_1^{(II)}(p) f_2^{(II)}(p) = \frac{Z_1^{(II)}(p)}{N_1^{(II)}(p)} \frac{Z_2^{(II)}(p)}{N_2^{(II)}(p)} \quad (4.65b)$$

und entsprechend $Z_1^{(II)}(p_0) = 0$. Gleichsetzen der rechten Seiten der Gln.(4.65a,b) liefert

$$Z_1^{(I)}(p) Z_2^{(I)}(p) = K_0 Z_1^{(II)}(p) Z_2^{(II)}(p) \quad (4.65c)$$

sowie

$$N_1^{(I)}(p) N_2^{(I)}(p) = K_0 N_1^{(II)}(p) N_2^{(II)}(p) \quad (4.65d)$$

mit einer frequenzunabhängigen Konstanten K_0 . Weiterhin wird

$$Z_1^{(I)}(p) = K_1 Z_1^{(II)}(p) \quad (4.65e)$$

und

$$Z_2^{(I)}(p) = \frac{K_0}{K_1} Z_2^{(II)}(p) \quad (4.65f)$$

gelten mit ebenfalls frequenzunabhängigem K_1 . Wegen der Voraussetzung $Z_1^{(I)}(j\omega_0) = Z_1^{(II)}(j\omega_0) = 0$ können $Z_1^{(I)}(p)$, $Z_1^{(II)}(p)$ in der Form

$$Z_1^{(I)}(p) = K^{(I)} (a_2^{(I)} p^2 + a_0^{(I)}), \quad (4.65g)$$

$$Z_1^{(II)}(p) = K^{(II)}(a_2^{(II)} p^2 + a_0^{(II)}) \quad (4.65h)$$

dargestellt werden. Dabei sollen $K^{(I)}, K^{(II)}$ so festgelegt werden, daß $a_2^{(I)}, (a_2^{(II)})$ und $a_0^{(I)}, (a_0^{(II)})$ als Funktionen der Netzwerkelemente keine gemeinsamen Faktoren mehr enthalten.

Aus Gl.(4.65c) folgt mit den Gln.(4.65g,h)

$$K^{(I)} a_2^{(I)} = K_1 K^{(II)} a_2^{(II)}, \quad (4.65i)$$

$$K^{(I)} a_0^{(I)} = K_1 K^{(II)} a_0^{(II)}. \quad (4.65k)$$

Zunächst verschwinden wegen Gl.(1.22) und den Gln.(4.65a,b)

mit $Z_1^{(I)}(p_0) = Z_1^{(II)}(p_0) = 0$ die Empfindlichkeiten sämtlicher die Restfunktionen $f_2^{(I)}, f_2^{(II)}$ realisierenden Elemente. Allgemein gilt weiter für die Empfindlichkeiten von f bezüglich der Elemente $x_{1\mu}^{(I)}$ des die Teilfunktion $f_1^{(I)}$ realisierenden Netzwerks an der Stelle $p_0 = j\omega$.

$$S_{x_{1\mu}^{(I)}}^f = - \frac{Z_2^{(I)}}{N_1^{(I)} N_2^{(I)}} \frac{\partial Z_1^{(I)}}{\partial x_{1\mu}^{(I)}} x_{1\mu}^{(I)} / p=p_0 \quad (4.65l)$$

bzw. für die entsprechenden Elemente des die Teilfunktion $f_1^{(II)}$ realisierenden Netzwerks

$$S_{x_{1\mu}^{(II)}}^f = - \frac{Z_2^{(II)}}{N_1^{(II)} N_2^{(II)}} \frac{\partial Z_1^{(II)}}{\partial x_{1\mu}^{(II)}} x_{1\mu}^{(II)} / p=p_0. \quad (4.65m)$$

Eine Bedingung für die Gleichheit $S_{x_{1\mu}^{(I)}}^f(p_0) = S_{x_{1\mu}^{(II)}}^f(p_0)$ dieser Empfindlichkeiten ergibt sich durch Gleichsetzen der Gln.(4.65l,m) unter Beachtung der Gln.(4.65d,f). Man erhält

$$S_{x_{1\mu}^{(I)}}^{Z_1^{(I)}} = K_1 S_{x_{1\mu}^{(II)}}^{Z_1^{(II)}}, \quad p=p_0. \quad (4.65n)$$

Wie man wegen der Gln.(4.65i,k) sofort sieht, wird Gl.(4.65n) sicher dann erfüllt sein, wenn die Koeffizienten $a_2^{(I)}, a_0^{(I)}$ (entsprechend $a_2^{(II)}, a_0^{(II)}$) so dargestellt werden können, daß keine Additionen oder Subtraktionen auftreten. Dies stellt eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für die Gleichheit der Empfindlichkeiten von f bezüglich der Elemente $x_{1\mu}^{(I)}$ und $x_{1\mu}^{(II)}$ dar.

Bei dem obigen Beispiel wurde zur Realisierung der Teilübertragungsfunktionen die Struktur von Bild 86 verwendet. Mit $R_6 = 0$,

R_7 beliebig, lautet die zugehörige Netzwerkfunktion

$$f = \frac{u_1}{u_2} = \frac{R_2(R_0 + R_3) \{ R_5 R_7 C_1 R_9 C_2 p^2 + R_4 \}}{(R_4 + R_5) \{ R_3(R_1 + R_2) R_8 C_1 R_9 C_2 p^2 + (R_0 + R_3) R_1 R_9 C_2 p + R_0(R_1 + R_2) \}}.$$

Man sieht, daß hier $a_2^{(I,II)}$ jeweils als Produkt $R_5 R_8 C_1 R_9 C_2$ auftritt und $a_0^{(I,II)}$ durch jeweils R_4 bestimmt ist.

Die Netzwerkstruktur von Bild 89 erfüllt damit die oben genannten notwendigen Bedingungen für die Gleichheit der jeweiligen halbrelativen Empfindlichkeiten $S_{x_{dp}}^{f(z,x)}(p_0)$, womit dann auch die entsprechenden Empfindlichkeiten $S_{x_{dp}}^{f(z,x)}(p_0)$ (siehe Gl.(2.11)) gleich sind und somit $\bar{\Phi}^I(p_0) = \bar{\Phi}^{II}(p_0)$ wird.

Insgesamt ergibt sich damit, daß die Gleichheit der Gesamtempfindlichkeit an Übertragungsnullstellen auf der imaginären Achse stets auftritt, wenn zur Realisierung der verschiedenen aktiven Netzwerke für alle Teilübertragungsfunktionen zweiten Grades dieselbe Grundstruktur verwendet wird und darüber hinaus die Zählerkoeffizienten der Übertragungsfunktion dieser Grundstruktur in algebraischer Form (bis aus gemeinsame Faktoren, die Summen enthalten dürfen) nur aus Ausdrücken bestehen, die keine Additionen oder Subtraktionen von Netzwerkelementen enthalten. An diesen Stellen mit gleicher Gesamtempfindlichkeit wird dann ähnlich wie bei passiven RLC-Netzwerken für je zwei Realisierungen I und II ein Übergang von $\bar{\Phi}^I > \bar{\Phi}^{II}$ zu $\bar{\Phi}^I < \bar{\Phi}^{II}$ oder umgekehrt zu erwarten sein.

4.3.3 Empfindlichkeitsoptimale Netzwerke zweiten Grades

Die Ausführungen des letzten Abschnitts haben die Bedeutung der Übertragungsfunktionen zweiten Grades bei der Synthese aktiver RC-Netzwerke gezeigt. Im folgenden werden daher Empfindlichkeitsuntersuchungen auf Realisierungen solcher Netzwerke beschränkt.

Nach der früheren Definition wurde ein passives RLC-Netzwerk empfindlichkeitsoptimal genannt, wenn die Empfindlichkeiten der verschiedenen Netzwerkelementearten für beliebiges $p=j\omega$ untereinander jeweils gleich groß waren. Man könnte diese Forderung auch auf aktive RC-Netzwerke ausdehnen, allerdings nur für die

passiven Elemente. Denn über die Größe der Empfindlichkeiten $S_{K\mu}^f$ der aktiven Parameter läßt sich anhand der allgemeinen Übertragungsfunktion zweiten Grades ohne Bezug auf eine spezielle Netzwerkkonfiguration kaum etwas aussagen. Als Ausweg werden im folgenden anstelle der Empfindlichkeiten $S_{K\mu}^f(p)$ der Übertragungsfunktion f die entsprechenden Q - und ω_0 -Empfindlichkeiten für die Pole untersucht (zur Definition siehe Abschnitt 1.2). Die Verwendung dieser Größen hat zunächst den Vorteil, daß sie experimentell gemessen werden können; außerdem wird zu ihrer Bestimmung nur der Nenner der Übertragungsfunktion benötigt, wodurch auch ohne Bezug auf eine spezielle Realisierung Angaben über die entsprechenden Empfindlichkeiten bezüglich der aktiven Parameter möglich sind. Darüber hinaus können mit den Q - und ω_0 -Empfindlichkeiten auch die Empfindlichkeiten der Übertragungsfunktion $f(p) = Z(p)/(p^2 + 2\sigma p + \omega_0^2)$ für $Q \gg 1$ in der Umgebung von $p = j\omega_0$ wegen des folgenden Zusammenhangs abgeschätzt werden [39]:

$$\bar{S}_{K\mu}^f(j\omega_0) \approx \bar{S}_{K\mu}^Q + j2Q\bar{S}_{K\mu}^{\omega_0}. \quad (4.69)$$

Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Gl.(4.69) ist allerdings, daß die Nullstellen von $Z(p)$ hinreichend weit von $p = j\omega_0$ entfernt sind. Man sieht, daß vor allem auf eine geringe ω_0 -Empfindlichkeit geachtet werden muß, da diese in der unmittelbaren Umgebung der Polstelle einen um den Faktor $2Q$ größeren Einfluß auf $\bar{S}_{K\mu}^f$ ausübt als die Q -Empfindlichkeit. Qualitativ ist das auch verständlich.

Der Begriff empfindlichkeitsoptimal ging aus der Forderung nach minimaler Gesamtempfindlichkeit Φ^f der Netzwerkfunktion f hervor. Analog zur ursprünglichen Definition soll empfindlichkeitsoptimal jetzt bedeuten, daß die beiden Ausdrücke

$$\bar{\Phi}^Q = \sum_{\mu, \text{passiv}} (\bar{S}_{\mu}^Q)^2 + \sum_{\mu, \text{aktiv}} (\bar{S}_{\mu}^Q)^2 \quad (4.70)$$

und

$$\bar{\Phi}^{\omega_0} = \sum_{\mu, \text{passiv}} (\bar{S}_{\mu}^{\omega_0})^2 + \sum_{\mu, \text{aktiv}} (\bar{S}_{\mu}^{\omega_0})^2 \quad (4.71)$$

minimal werden. Die Größen $\bar{\Phi}^Q, \bar{\Phi}^{\omega_0}$ entstehen als Summe der quadrierten Empfindlichkeiten passiver und aktiver Elemente. Es soll daher versucht werden, zunächst die theoretischen unteren Schranken für die beiden Anteile zu bestimmen und anschließend

die Ergebnisse anhand von Realisierungen zu diskutieren.

Die Anforderungen an die passiven Elemente für minimales $\bar{\Phi}^Q, \bar{\Phi}^{\omega_c}$ lassen sich den Gln.(4.26a,b) bzw. den Gln.(4.28,29) über die Summenempfindlichkeiten entnehmen. Man sieht, für die Q-Empfindlichkeiten tritt der optimale Fall ein, wenn die Empfindlichkeiten sämtlicher c Kapazitäten und r Ohmwidestände in dem betrachteten Netzwerk gleich Null sind.

$$\bar{S}_{C_\mu}^Q = \bar{S}_{R_\nu}^Q = 0; \quad \begin{matrix} \mu=1,\dots,c; \\ \nu=1,\dots,r. \end{matrix} \quad (4.72)$$

Für diejenigen passiven Elemente, die die Polgüte bestimmen, bedeutet Gl.(4.72), daß Q als Funktion der Netzwerkelemente an deren Nennwerten ein Extremum besitzen muß.

Für die ω_c -Empfindlichkeiten bezüglich der Kapazitäten erhält man im optimalen Fall mit Gl.(4.29)

$$\bar{S}_{C_\mu}^{\omega_c} = -1/c; \quad \mu=1,\dots,c. \quad (4.73)$$

Ein analoges Ergebnis ergibt sich für die Widerstände aus Gl.(4.28), wenn das betrachtete Netzwerk keine gesteuerte Quellen mit dimensionsbehafteten Steuerfaktoren enthält.

$$\bar{S}_{R_\nu}^{\omega_c} = -1/r; \quad \nu=1,\dots,r. \quad (4.74)$$

Im anderen Fall läßt sich zunächst nur sagen, daß alle $\bar{S}_{R_\nu}^{\omega_c}$ für minimales $\bar{\Phi}^{\omega_c}$ negativ und gleich groß sein müssen. Bei den Q-Empfindlichkeiten tritt diese Schwierigkeit nicht auf, da hier auch beim Vorhandensein dimensionsbehafteter Steuerfaktoren im empfindlichkeitsoptimalen Fall die Empfindlichkeiten bezüglich sämtlicher passiven Elemente wegen der Gln.(4.26a,b) verschwinden müssen.

Wesentlich schwieriger gestaltet sich eine allgemeine Diskussion der Empfindlichkeiten aktiver Parameter. Das liegt daran, daß verschiedene Arten aktiver Elemente betrachtet werden müssen (neben gesteuerten Quellen Negativ-Impedanz-Konverter, Gyrationen und Operationsverstärker) sowie die einzelnen Syntheseverfahren auf die speziellen Eigenschaften der jeweiligen aktiven Elemente ausgerichtet sind. Insbesondere ergeben sich Probleme, falls das betreffende Netzwerk als aktive Elemente ausschließlich ideale Operationsverstärker enthält, da dann in der Übertra-

gungsfunktion nur passive Elemente auftreten. In manchen Fällen ließen sich zwar formal aktive Parameter einführen. Zum Beispiel könnte bei der Konfiguration von Bild 80 über Gl.(4.32) ein Verstärkungsfaktor $\mu = -R_b/R_a$ definiert werden. Auf die Summenempfindlichkeiten Gln.(4.26a,28) hätte das keinen Einfluß, da stets $\bar{S}_{R_a}^{\mu} + \bar{S}_{R_b}^{\mu} = -1 + 1 = 0$ gilt. Es ändert sich aber die Gesamtempfindlichkeit, wenn von zwei passiven Elementen zu einem fiktiven aktiven Parameter übergegangen wird. Das zeigt wieder die begrenzte Aussagefähigkeit der Empfindlichkeiten bezüglich aktiver Parameter, die nur in bezug auf ihre Größenordnung mit passiven Elementen verglichen werden können.

Eine allgemeine Diskussion ist praktisch nur dann möglich, wenn die Realisierung nur ein aktives Element enthält oder zur algebraischen Untersuchung alle aktiven Größen im Nenner der Übertragungsfunktion zu einer einzigen Variablen zusammengefaßt werden können. Das hat den Vorteil, daß die Q- und ω_0 -Empfindlichkeiten dieses Parameters k weitgehend unabhängig von einer speziellen Realisierung allein anhand des allgemeinen Nennerpolynoms zweiten Grades mit komplexen Nullstellen untersucht werden können. Dazu wird $N(p)$ in eine Summe oder eine Differenz zweier Polynome $A(p)$ und $B(p)$ zerlegt:

$$N(p) = p^2 + 2\sigma_p p + \omega_0^2; \quad (4.75)$$

$$N(p) = A(p) \pm B(p), \quad k > 0. \quad (4.76)$$

Es existieren damit zwei große Klassen von Zerlegungen. Die Polynome $A(p)$, $B(p)$ können natürlich nicht beliebig gewählt werden, sondern unterliegen je nach der zur Realisierung verwendeten Netzwerkkonfiguration bestimmten Bedingungen, auf die aber nicht eingegangen werden soll. Einzelheiten darüber finden sich z.B. in [47].

Zunächst soll gezeigt werden, daß eine Differenzbildung zur Realisierung mittlerer bis hoher Polgüten vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus schlecht geeignet ist. Realisierungen von Übertragungsfunktionen, die Negativ-Impedanz-Konverter enthalten, lassen sich gewöhnlich auf diese Weise zerlegen. Von den möglichen Zerlegungen eines Nennerpolynoms interessiert speziell diejenige, für die $|S_k^N|$ minimal wird. HOROWITZ [27] hat gezeigt, daß

dies der Fall ist, wenn sich das Polynom zweiten Grades Gl.(4.75) folgendermaßen zerlegen läßt:

$$N(p) = (p + \omega_0)^2 - k2\omega_0(1 - \frac{\sigma_0}{\omega_0})p = p^2 + 2\omega_0(1 - k + \frac{k\sigma_0}{\omega_0})p + \omega_0^2; \quad k=1. \quad (4.77)$$

Nun gilt allgemein für ein Polynom der Form

$$N(p) = \alpha p^2 + \beta p + \gamma : \quad (4.78)$$

$$Q = \sqrt{\alpha\gamma}/\beta, \quad (4.79)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\gamma/\alpha}. \quad (4.80)$$

Hieraus folgt für die Q- und ω_0 -Empfindlichkeiten bezüglich eines beliebigen Parameters X:

$$\bar{S}_X^Q = \frac{1}{2}\bar{S}_X^{\alpha} - \bar{S}_X^{\beta} + \frac{1}{2}\bar{S}_X^{\gamma}, \quad (4.81)$$

$$\bar{S}_X^{\omega_0} = \frac{1}{2}(\bar{S}_X^{\gamma} - \bar{S}_X^{\alpha}). \quad (4.82)$$

Für das nach HOROWITZ optimal zerlegte Polynom Gl.(4.77) erhält man daher mit $k=1$:

$$\bar{S}_k^Q = 2Q - 1, \quad (4.83)$$

$$\bar{S}_k^{\omega_0} = 0. \quad (4.84)$$

Wie man sieht, wächst selbst bei optimaler Zerlegung des Nenners die Q-Empfindlichkeit proportional mit Q, weshalb eine Differenzbildung als Grundlage für Netzwerke mit Polgüten >5 vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus nicht zu empfehlen ist.

Es muß aber betont werden, daß trotzdem auf der Grundlage von Nennerdifferenzbildung Polgüten von $Q>1000$ realisiert werden können. Die Netzwerkstruktur von TARMY, GHAUSI [48] bzw. das verbesserte Netzwerk von MÜLLER [49] sind hierfür Beispiele. Es treten zwar Empfindlichkeiten von der Größenordnung 10^2 - 10^3 auf. Für die Realisierung ist das jedoch kein unüberwindbares Hindernis, da bei diesen hohen Polgüten sowieso ein nachträglicher Abgleich des Netzwerks erforderlich ist und bei Verwendung von Metallfilmwiderständen mit gleichem (niedrigen) Temperaturkoeffizienten ein Verstärkungsfaktor wie für die Konfiguration von Bild 80 sehr stabil und genau verwirklicht werden kann. Das Empfindlichkeitsproblem tritt also in den Hintergrund, wenn die Toleranzen der Elemente genügend klein sind bzw. ein Abgleich

erforderlich ist. Trotzdem dürfte eine Netzwerkkonfiguration mit prinzipiell kleineren Empfindlichkeiten auch vom praktischen Standpunkt aus vorzuziehen sein, da sich dann die Realisierung einer Übertragungsfunktion bzw. ein Abgleich des realisierten Netzwerks sicher einfacher gestalten.

Auch bei der zweiten Klasse von Syntheseverfahren, die auf der Summenzerlegung des Nennerpolynoms beruhen, besteht die Möglichkeit, die durch das gewählte Realisierungsverfahren bzw. die Netzwerkstruktur vorgegebenen Freiheitsgrade bei der Wahl von $A(p)$, $B(p)$ zur Empfindlichkeitsoptimierung auszunutzen. CALAHAN [29] hat gezeigt, daß für ein Nennerpolynom mit nur konjugiert komplexen Nullstellen der Betrag der Polempfindlichkeiten der Übertragungsfunktion gegenüber dem aktiven Parameter k minimal wird, wenn sich $N(p)$ in folgender Form zerlegen läßt:

$$N(p) = ka^2(p) + b^2(p). \quad (4.85)$$

Nähere Einzelheiten und Eigenschaften dieser Zerlegung, speziell unter welchen Voraussetzungen sie überhaupt durchführbar ist, können in [47] nachgelesen werden. Aus Realisierbarkeitsgründen (siehe z.B. die Netzwerkstruktur von Bild 79) sind die Nullstellen von $A(p)$, $B(p)$ (und damit auch die Nullstellen von $a(p)$, $b(p)$) auf die negativ reelle Achse beschränkt. Wie man leicht sieht, ist die Zerlegung Gl.(4.85) nicht eindeutig, wenn der Grad von $a(p)$ und $b(p)$ gleich ist. Für das Polynom Gl.(4.75) erhält man mit $k=1$:

$$N(p) = k(p + \sigma_0)^2 + (\omega_0^2 - \sigma_0^2) = kp^2 + 2\sigma_0 kp + \omega_0^2 + \sigma_0^2(k-1); \quad (4.86)$$

Mit den Gln.(4.81,82) folgt hieraus für die Q - und ω_0 -Empfindlichkeiten

$$\bar{S}_k^Q = \bar{S}_k^{\omega_0} = -\frac{1}{2} + \frac{\sigma_0^2}{2\omega_0^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8Q^2}. \quad (4.87)$$

Da der zweite Term mit wachsendem Q vernachlässigt werden kann, bleibt

$$\left| \bar{S}_k^{\omega_0} \right| = \left| \bar{S}_k^Q \right| < \frac{1}{2}$$

unabhängig von Q , weshalb die Summenzerlegung besonders zur Realisierung hoher Polgüten geeignet ist, da die Q -Empfindlichkeiten bedeutend niedriger sind als der entsprechende Ausdruck Gl.(4.83). Die Netzwerkkonfiguration von REDDY [50] ist hierfür

ein Beispiel.

Die Gln.(4.83,84) bzw. die Gl.(4.87) ergeben die Q- und ω_0 -Empfindlichkeiten, wenn das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion gemäß Gl.(4.77) bzw. Gl.(4.86) optimal zerlegt ist. Es muß jedoch gesagt werden, daß diese optimale Zerlegung nur bei wenigen Syntheseverfahren durchführbar ist und dann auch zu Einschränkungen für den Zähler der Übertragungsfunktion führen kann (siehe z.B. UNBEHAUEN, MAYER [51]).

Allerdings gilt mit Gl.(4.78) bei jeder Summenzerlegung und für jeden aktiven oder passiven Parameter X_p

$$0 \leq |\bar{S}_{X_p}^{\alpha}, \bar{S}_{X_p}^{\beta}, \bar{S}_{X_p}^{\gamma}| \leq 1,$$

so daß wegen der Gln.(4.81,82) bei Summenzerlegung die Einschränkungen

$$|\bar{S}_{X_p}^{\alpha}| \leq 1, \quad |\bar{S}_{X_p}^{\omega_0}| \leq \frac{1}{2}$$

für beliebige aktive und passive Parameter stets erfüllt sind. Meistens ergeben sich auch bei nichtoptimaler Summenzerlegung des Nenners für die Empfindlichkeiten bezüglich der aktiven Parameter zu Gl.(4.87) entsprechende Ausdrücke (siehe Netzwerkstruktur von Bild 91). Die Beträge der Q-Empfindlichkeiten bezüglich der aktiven Parameter sind damit bei Summenzerlegung für $Q > 1$ stets geringer als bei Differenzzerlegung.

Die Zerlegung von CALAHAN Gl.(4.85) stellt insofern eine spezielle Polynomsummenzerlegung dar, als unter anderem die Nullstellen von $a(p)$, $b(p)$ auf die negativ reelle Achse beschränkt sind. Es ist deshalb zu prüfen, ob mit einer allgemeineren Zerlegung nicht noch kleinere Q- und ω_0 -Empfindlichkeiten erreicht werden können.

Eine allgemeinere Polynomzerlegung vom Typ $N(p) = A(p) + kB(p)$, $k > 0$, zur Minimierung der Empfindlichkeit des aktiven Parameters als die bisher besprochenen wurde von HAKIM [30] vorgeschlagen, indem für das Polynom $B(p)$ auch komplexe Nullstellen zugelassen wurden. Die voneinander verschiedenen Nullstellen von $A(p)$ bleiben dagegen auf die negativ reelle Achse beschränkt. Setzt man zur Vereinfachung der Rechnung im Nennerpolynom $N(p)$ (Gl.(4.75)) $\omega_0 = 1$, so gilt

$$p^2 + 2\sigma_0 p + 1 = ap^2 + bp + c + k(p^2 + 2\alpha_x p + \omega_x^2) =$$

$$= (a+k)p^2 + (b+2\alpha_x k)p + c + k\omega_x^2. \quad (4.88)$$

Mit den Gln.(4.81,82) erhält man unmittelbar

$$\bar{S}_k^Q = \frac{k}{2} \left(\frac{\sigma_0 - \alpha_x}{\sigma_0} + \omega_x^2 \right), \quad (4.89)$$

$$\bar{S}_k^Q = \frac{k}{2} (\omega_x^2 - 1). \quad (4.90)$$

HAKIM führt nun einen unabhängigen Entwurfsparameter $m \geq 0$ ein und zeigt, daß unter den Voraussetzungen

$$\alpha_x = \sigma_0 (1 + m) \quad (4.91)$$

$$\omega_x^2 = 1 + 2m \quad (4.92)$$

$$\frac{1 + m - \frac{m}{\sqrt{1 - \sigma_0^2}}}{1 + 2m - \frac{m^2 \sigma_0^2}{1 - \sigma_0^2}} < k < \frac{1}{1 + 2m} \quad (4.93)$$

die Nullstellen von $A(p)$ auf der negativ reellen Achse liegen. Mit den Gln.(4.91,92) ergibt sich dann für die Q- und ω_0 -Empfindlichkeiten aus den Gln.(4.89,90):

$$\bar{S}_k^Q = \frac{k}{2} (1 + m), \quad (4.94)$$

$$\bar{S}_k^{\omega_0} = km. \quad (4.95)$$

Für $m \rightarrow 0$ strebt $k \rightarrow 1$ und damit wird

$$\bar{S}_k^Q \approx 1/2, \quad \bar{S}_k^{\omega_0} \approx 0. \quad (4.96)$$

Die Zerlegung von HAKIM liefert damit bezüglich der ω_0 -Empfindlichkeiten des aktiven Parameters k ein optimales Ergebnis und scheint deshalb dem Verfahren von CALAHAN vorzuziehen zu sein.

Der praktische Wert der Nennerpolynomzerlegung einer Übertragungsfunktion kann jedoch erst nach einer Analyse des zugehörigen Realisierungsverfahrens beurteilt werden. Erst dann können die Empfindlichkeiten der passiven Elemente bestimmt werden und deren Beitrag zur Gesamtempfindlichkeit Gl.(4.69) bzw. Gl.(4.70) ermittelt werden. Das Verfahren von HAKIM muß daher genauer untersucht werden.

HAKIM schlägt für Übertragungsfunktionen vom Typ $f = \mathcal{U}_2 / \mathcal{U}_1$ die in Bild 90 dargestellte Netzwerkkonfiguration vor.

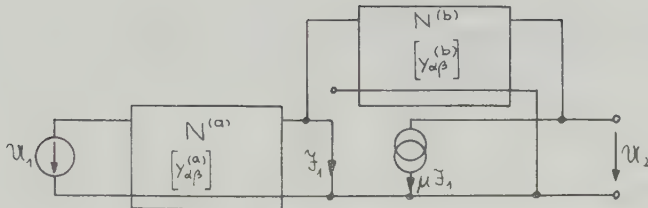


Bild 90

Als aktives Element wird eine stromgesteuerte Stromquelle benutzt. Unter Verwendung der Admittanzparameter für die beiden passiven RC-Zweitore $N^{(a)}$ und $N^{(b)}$ erhält man

$$f = U_2/U_1 = Z(p)/N(p) = \frac{\mu Y_{21}^{(a)}(p)}{Y_{22}^{(b)}(p) - \mu Y_{12}^{(b)}(p)} \quad (4.97)$$

Wesentlich für das folgende ist, daß der Nenner von Gl.(4.97) vom Zweitor $N^{(a)}$ nicht beeinflußt wird und die Nullstellen von $B(p)$ durch das Zweitor $N^{(b)}$ als Nullstellen von $Y_{12}^{(b)}(p)$ verwirklicht werden. Für eine Übertragungsfunktion zweiten Grades ergeben sich die Polstellen von f mit Gl.(4.88) zu

$$p_{1,2} = -\sigma_0 \pm j\sqrt{1 - \sigma_0^2} \quad (4.98)$$

während man für die Nullstellen des Polynoms $B(p)$ mit den Gln. (4.88,91,92) den folgenden Ausdruck erhält:

$$z_{1,2} = -\sigma_0(1+m) \pm j\sqrt{1+2m - \sigma_0^2(1+m)^2} \quad (4.99)$$

Für $m \rightarrow 0$ werden die Q - und ω_0 -Empfindlichkeiten des aktiven Parameters minimal. Wie man durch Vergleich der Gln.(4.98,99) feststellt, wandern dann die Nullstellen von $B(p)$ auf die Polstellen von $f(p)$ zu. Es interessieren nun die vollrelativen Empfindlichkeiten der Übertragungsfunktion Gl.(4.97) bezüglich der Elemente $X_g^{(b)}$ des Netzwerks $N^{(b)}$ bzw. bezüglich des aktiven Parameters μ . Man erhält hierfür

$$\bar{S}_{X_g^{(b)}}^f = - \frac{\left(\frac{\partial Y_{22}^{(b)}}{\partial X_g^{(b)}} - \frac{\mu \partial Y_{12}^{(b)}}{\partial X_g^{(b)}} \right) X_g^{(b)}}{Y_{22}^{(b)} - \mu Y_{12}^{(b)}} \quad (4.100)$$

$$\bar{S}_\mu^f = 1 + \frac{\mu Y_{12}^{(b)}}{Y_{22}^{(b)} - \mu Y_{12}^{(b)}} \quad (4.101)$$

Mit $m \ll 1$ wird dann zunächst

$$N(p) \approx -\mu y_{12}^{(b)}(p), \quad (4.102)$$

wodurch sich die obigen Gleichungen vereinfachen zu

$$\bar{S}_m^F \approx 0, \quad S_{X_q}^F \approx -\bar{S}_{X_q}^{(b)}.$$

Bezüglich des aktiven Parameters besitzt also die Übertragungsfunktion deshalb eine so geringe Empfindlichkeit, weil die Polstellen der Übertragungsfunktion bei $m \ll 1$ weitgehend als Übertragungsnullstellen im Zweitor $N^{(b)}$ erzeugt werden. Zur Realisierung von $N^{(b)}$ müssen überbrückte T-Glieder oder Doppel-T RC-Zweitore benutzt werden. Zusammen mit dem Netzwerk $N^{(a)}$ erfordert das eine große Zahl passiver Elemente. Da jedoch die Elemente des Zweitores $N^{(a)}$ auf die Lage der Pole der Übertragungsfunktion keinen Einfluß haben, kann die Zerlegung von HAKIM bezüglich der passiven Elemente wegen der Gln.(4.73,74) nicht empfindlichkeitsoptimal werden. Bild 81 zeigt eine nach HAKIM gewonnene Realisierung für die Tiefpaßfunktion

$$f = U_1/U_2 = A/(p^2 + \sqrt{2} p + 1).$$

Selbst bei einer so geringen Polgüte ist ein Verstärkungsfaktor von $\mu = 48.1$ erforderlich bei $m = 0.1$. Außerdem sieht man, daß durch die Optimierung zwar die Empfindlichkeit des Verstärkungsfaktors klein wurde, was aber in dem Maße nicht sinnvoll erscheint, da die Empfindlichkeiten bezüglich der passiven Elemente des Teilnetzwerks $N^{(b)}$ um ein Vielfaches größer sind. Im Hinblick auf Gesamtempfindlichkeit und den Aufwand an Netzwerkelementen stellt damit die Zerlegung von HAKIM keine sehr überzeugende Lösung dar.

Das vorangegangene Beispiel zeigte deutlich, daß theoretische Untersuchungen über die Nennerzerlegung von Übertragungsfunktionen zwecks Minimierung der Empfindlichkeiten bezüglich aktiver Parameter wenig nützen, wenn das zugehörige Syntheseverfahren unter dem Gesichtspunkt der Gesamtempfindlichkeit bezüglich aktiver und passiver Elemente zu keiner brauchbaren Realisierung führt bzw. geringe Empfindlichkeiten der aktiven Parameter diejenigen der passiven Elemente entsprechend erhöhen.

Damit soll ausgedrückt werden, daß nur die Gln.(4.70,71) (eventuell noch mit einer geeigneten Gewichtung zwischen aktiven und passiven Parametern versehen) zur Beurteilung des Empfindlichkeitsverhaltens einer aktiven RC-Struktur in Frage kommen. Die Bedeutung allgemeiner Betrachtungen zur Nennerzerlegung von Übertragungsfunktionen schrumpft damit auf die Feststellung zusammen, daß vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus bei größeren Polgüten eine Differenzbildung vermieden werden sollte.

Nach diesen Ausführungen ist es auch verständlich, daß sich über die Gln.(4.70,71) keine Werte für die theoretisch minimalen Gesamtempfindlichkeiten aktiver RC-Netzwerke angeben lassen, da die obigen Überlegungen die theoretisch minimalen Einzelempfindlichkeiten für aktive und passive Elemente getrennt und ohne Bezug zueinander ergaben.

Erst anhand konkreter Netzwerke läßt sich daher prüfen, inwiefern sich minimale Empfindlichkeiten für aktive und passive Elemente gleichzeitig verwirklichen lassen. Im folgenden werden deshalb einige Realisierungen von Übertragungsfunktionen zweiten Grades daraufhin untersucht. Für die Auswahl der Netzwerke waren dabei nicht die praktische Anwendbarkeit, sondern nur die Empfindlichkeitseigenschaften ausschlaggebend.

Als erstes wird das sehr einfache Netzwerk nach SALLEN, KEY [35] betrachtet (Bild 91).

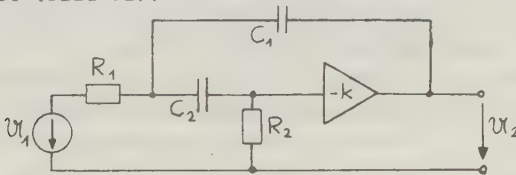


Bild 91

Die zugehörige Bandpaßübertragungsfunktion lautet in Abhängigkeit von den Netzwerkelementen:

$$f = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-pkR_2C_2}{p^2(1+k)R_1C_1R_2C_2 + p(R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2) + 1} \quad (4.103)$$

Mit den Werten $R_1=R_2=1$, $C_1=C_2=1/(3Q)$, $k=9Q^2 - 1$ ergibt sich aus Gl.(4.103)

$$f = \frac{-pA}{p^2 + p\frac{1}{Q} + 1}, \quad A = 3Q - \frac{1}{3Q}. \quad (4.104)$$

Für die Empfindlichkeiten erhält man mit den Gln.(4.81,82):

$$\bar{S}_{R_1}^Q = -\bar{S}_{C_1}^Q = -\bar{S}_{R_2}^Q = \bar{S}_{C_2}^Q = -1/6, \quad \bar{S}_k^Q = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{9Q^2}\right);$$

$$\bar{S}_{R_1}^{\omega_0} = \bar{S}_{C_1}^{\omega_0} = \bar{S}_{R_2}^{\omega_0} = \bar{S}_{C_2}^{\omega_0} = -1/2, \quad \bar{S}_k^{\omega_0} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{9Q^2}\right).$$

Gemäß den Gln.(4.73,74) sind damit die ω_0 -Empfindlichkeiten der passiven Elemente minimal, während die entsprechenden Q-Empfindlichkeiten zwar klein sind, aber nicht den theoretisch optimalen Wert Null besitzen. Was die Empfindlichkeiten des aktiven Parameters anbetrifft, sieht man aus Gl.(4.103), daß die Nennerzerlegung von der allgemeinen Form

$$N(p) = (p + \sigma_1)(p + \sigma_2) + ktp^2 = p^2(1 + k\tau) + p(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2 \quad (4.105)$$

ist. Hierfür gilt

$$\left| \bar{S}_k^Q \right| = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{k\tau}{1+k\tau} \right) \right| < \frac{1}{2}, \quad (4.106)$$

$$\left| \bar{S}_k^{\omega_0} \right| = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{k\tau}{1+k\tau} \right) \right| < \frac{1}{2}. \quad (4.107)$$

Wie man den Gln.(4.106,107) entnimmt, erhält man für großes k und damit (wegen $k = 9Q^2 - 1$) großes Q im Grenzfall die gleichen Ergebnisse für die Empfindlichkeiten bezüglich der aktiven Parameter wie bei der Zerlegung von CALAHAN. Da der Verstärkungsfaktor im SALLEN-KEY Netzwerk von Bild 91 den Wert $9Q^2 - 1$ besitzt, kann dieses einfache Netzwerk nur zur Realisierung geringer Polgüten benutzt werden. Es stellt aber trotzdem eine gute Lösung dar, da es nur die Minimalzahl an Kapazitäten benötigt und eine geringe Gesamttempfindlichkeit besitzt.

SODERSTRAND, MITRA [41] behoben den Nachteil geringer Polgüten durch Hinzufügen eines weiteren nichtinvertierenden Verstärkers (Bild 92).

Als Übertragungsfunktion erhält man

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-pk_1k_2R_2C_2}{p^2(1+k_1k_2)R_1C_1R_2C_2 + p(R_1C_1 + R_2C_2) + 1}. \quad (4.108)$$

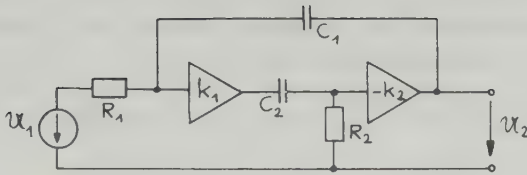


Bild 92

Mit den speziellen Werten $R_1=R_2=1$, $C_1=C_2=1/(2Q)$, $k_1=k_2=\sqrt{4Q^2-1}$ folgt hieraus

$$\bar{S}_{R_1}^Q = \bar{S}_{R_2}^Q = \bar{S}_{C_1}^Q = \bar{S}_{C_2}^Q = 0, \quad \bar{S}_{k_1}^Q = \bar{S}_{k_2}^Q = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right);$$

$$\bar{S}_{R_1}^{\omega_o} = \bar{S}_{R_2}^{\omega_o} = \bar{S}_{C_1}^{\omega_o} = \bar{S}_{C_2}^{\omega_o} = -1/2, \quad \bar{S}_{k_1}^{\omega_o} = \bar{S}_{k_2}^{\omega_o} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right).$$

Dieses Netzwerk ist damit bezüglich der passiven Elemente empfindlichkeitsoptimal, da die Q - und ω_o -Empfindlichkeiten gleichzeitig ihre minimalen Werte annehmen. Die Empfindlichkeiten der aktiven Parameter sind ebenfalls gleich groß und entsprechen den optimalen Werten bei Summenzerlegung des Nenners der Übertragungsfunktion. Das Netzwerk von Bild 92 kann demnach bezüglich der Q - und ω_o -Gesamtempfindlichkeit als optimal bezeichnet werden. Es ist allerdings zu bemerken, daß die Realisierung bezüglich der Empfindlichkeiten $S_{X_\mu}^f(p)$ nicht als optimal anzusehen ist, wie man sofort Gl. (4.108) entnimmt.

Das Netzwerk von Bild 92 benötigt ebenfalls nur die Minimalzahl an Reaktanzen. Da die Verstärkungsfaktoren gegenüber der Struktur von SALLEN,KEY nur noch $\approx 2Q$ betragen, können mittlere Polgüten realisiert werden.

Das nächste Beispiel (Bild 93) zeigt ein sehr einfaches Gyratornetzwerk, das an und für sich nur vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus interessant ist.

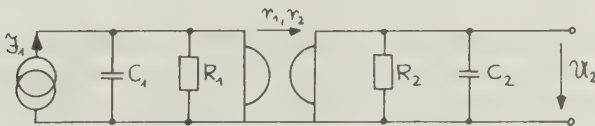


Bild 93

Zur Beschreibung des Gytrators werden die Parameter z_{12} , z_{21} der Impedanzmatrix Gl.(4.15) verwendet. Mit $z_{12}=-r_2$, $z_{21}=r_1$ erhält man für die Übertragungsfunktion

$$f = \frac{U_2}{I_1} = \frac{R_1 R_2 r_1}{p^2 R_1 C_1 R_2 C_2 r_1 r_2 + p r_1 r_2 (R_1 C_1 + R_2 C_2) + r_1 r_2 + R_1 R_2}. \quad (4.109)$$

Bemerkenswert ist zunächst, daß mit $R_1 C_1 = R_2 C_2$ das Netzwerk bezüglich der Empfindlichkeiten $S_{x_{\mu}}^f$ der passiven Elemente x_{μ} empfindlichkeitsoptimal wird. Unter der Voraussetzung $R_1 C_1 = R_2 C_2 = 1$ vereinfacht sich Gl.(4.109) weiter zu

$$U_2/I_1 = R_1 R_2 r_1 / (r_1 r_2 (p+1)^2 + R_1 R_2). \quad (4.110)$$

Wie sich durch Vergleich mit Gl.(4.86) ergibt, stellt dann der Nenner von Gl.(4.110) eine Calahanzerlegung dar, die die Q- und ω_0 -Empfindlichkeiten des aktiven Parameters (hier des Produkts $r_1 r_2$) minimiert. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $r_1 r_2 = R_1 R_2$ folgt:

$$\bar{S}_{C_1}^{\omega_0} = \bar{S}_{C_2}^{\omega_0} = -1/2, \quad \bar{S}_{R_1}^{\omega_0} = \bar{S}_{R_2}^{\omega_0} = \bar{S}_{r_1}^{\omega_0} = \bar{S}_{r_2}^{\omega_0} = -1/4.$$

Da r_1 , r_2 Widerstandsgrößen darstellen, sind wegen der Gln.(4.28, 29) sämtliche ω_0 -Empfindlichkeiten minimal. Für die Q-Empfindlichkeiten erhält man:

$$\bar{S}_{C_1}^Q = \bar{S}_{C_2}^Q = 0; \quad \bar{S}_{R_1}^Q = \bar{S}_{R_2}^Q = -\bar{S}_{r_1}^Q = -\bar{S}_{r_2}^Q = 1/4.$$

Man sieht, falls ein Netzwerk Gytratoren enthält, können die Q-Empfindlichkeiten bezüglich der ohmschen Parameter prinzipiell nicht alle den Minimalwert Null annehmen, da die Empfindlichkeiten der aktiven Parameter r_1 , r_2 bei einer Calahanzerlegung nur den minimalen Wert von Gl.(4.87) besitzen, andererseits Gl.(4.26a) erfüllt sein muß. Auf den ersten Blick scheint das ein Nachteil der Gytratornetzwerke gegenüber Realisierungen mit z.B. spannungsgesteuerten Spannungsquellen zu sein. Realisiert man jedoch diese Verstärker nach Bild 80, so gilt mit Gl.(4.32) $\bar{S}_{R_a}^{\mu} + \bar{S}_{R_b}^{\mu} = -1+1 = 0$, weshalb auch hier die Q-Empfindlichkeiten bezüglich R_a , R_b nicht alle optimal sein können.

Für den praktischen Wert eines aktiven RC-Netzwerks stellen die Empfindlichkeitseigenschaften nur einen Gesichtspunkt neben vielen anderen dar. Die Forderung nach minimaler Gesamtempfindlichkeit wird daher wegen weiterer, zusätzlicher Bedingungen

an eine brauchbare Realisierung kaum zu erfüllen sein. Ein erstes Beispiel dazu stellt das empfindlichkeitsoptimale Netzwerk von Bild 92 dar, das für $p=j\omega$ einen sehr niedrigen Eingangswiderstand besitzt, weshalb die Struktur gemäß Bild 94 abzuändern ist (REDDY [42]).

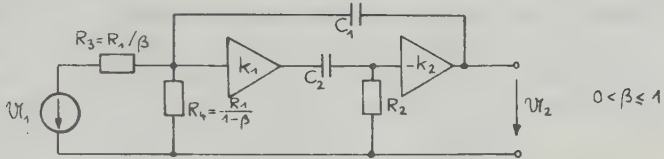


Bild 94

Die Modifikation bewirkt aber, daß die ω -Empfindlichkeiten bezüglich R_3 und R_4 , $\bar{S}_{R_3}^{\omega_0} = -\beta/2$, $\bar{S}_{R_4}^{\omega_0} = -\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}$, $0 < \beta \leq 1$, nicht mehr optimal sind.

Ein weiteres Beispiel bilden Netzwerke, bei denen die Koeffizienten der (bi-)quadratischen Übertragungsfunktion mit möglichst wenigen passiven Elementen unabhängig voneinander eingestellt werden können. Diese aus praktischen Erwägungen sinnvolle Forderung widerspricht aber minimaler Gesamtempfindlichkeit (analog dazu ist die Forderung nach leichter Abgleichbarkeit von Übertragungsnullstellen bei Reaktanznetzwerken), wie sich anhand einer Netzwerkkonfiguration von Åkerberg, MOSSBERG [52] zeigen läßt (Bild 95).

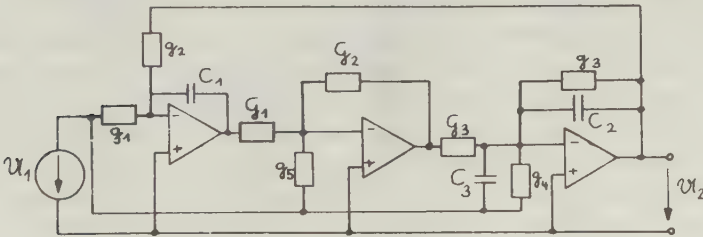


Bild 95

Die entsprechende Übertragungsfunktion lautet:

$$\frac{U_2}{U_1} = - \frac{p^2 C_3 G_2 + p(g_4 G_2 - g_5 G_3) + g_1 G_1 G_3 / C_1}{p^2 C_2 G_2 + p g_3 G_2 + g_2 G_1 G_3 / C_1} \quad (4.111)$$

Verschiedene Übertragungsfunktionen lassen sich sehr bequem durch Änderung der entsprechenden ohmschen Leitwerte $g_1, \dots, g_5$ realisieren. Je nachdem die Zählernullstellen in der linken oder rechten p- Halbebene liegen, wird g_5 oder g_4 gleich Null gesetzt. Man sieht, daß dann sämtliche Koeffizienten im Zähler und Nenner der Netzwerkfunktion nur noch aus jeweils einem Produkt von Netzwerkelementen bestehen (und nicht aus einer Summe von Produkten, was kleinere vollrelative Koeffizientenempfindlichkeiten zur Folge hätte). Da die Elemente $g_1, \dots, g_5$ nur in jeweils einem einzigen Koeffizienten auftreten, können wegen der Gl.n.(4.81,82) die entsprechenden Q- und ω_0 -Empfindlichkeiten nicht mehr alle optimal sein. Man erhält aus Gl.(4.111):

$$\begin{aligned} -\bar{S}_{C_1}^Q = \bar{S}_{C_2}^Q = 1/2, \quad \bar{S}_{g_1, g_4, g_5}^Q = 0, \quad \text{aber} \quad \bar{S}_{G_1, g_2, G_3}^Q = -\bar{S}_{G_2}^Q = 1/2, \quad \bar{S}_{g_3}^Q = -1. \\ \bar{S}_{C_1}^{\omega_0} = \bar{S}_{C_2}^{\omega_0} = -1/2, \quad \bar{S}_{G_1, g_2, G_3}^{\omega_0} = -\bar{S}_{G_2}^{\omega_0} = 1/2, \quad \bar{S}_{g_1, g_3, g_4, g_5}^{\omega_0} = 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\Phi^Q = 2.5$, $\Phi^{\omega_0} = 1.5$,

während man für die entsprechenden Größen der Realisierung von Bild 92 unter der Annahme, daß die Verstärker gemäß Bild 80 realisiert sind, im ungünstigsten Fall ($Q \rightarrow \infty$) nur $\bar{\Phi}^Q = 1$, $\bar{\Phi}^{\omega_0} = 2$ erhält.

Abschließend seien die wichtigsten Ergebnisse der Empfindlichkeitsbetrachtungen an aktiven RC-Netzwerken noch einmal kurz zusammengefaßt.

Obwohl die Empfindlichkeitsbeschreibung aktiver Bauelemente gewisse Schwächen besitzt, konnten die grundlegenden Probleme beim Entwurf aktiver RC-Netzwerke unter dem Gesichtspunkt geringer Gesamtempfindlichkeit befriedigend geklärt werden. So war es möglich, Richtlinien zur Faktorisierung, Gruppierung von Pol- und Nullstellen sowie zur Nennerzerlegung anzugeben, bei deren Beachtung ein günstiges Empfindlichkeitsverhalten der realisierten Netzwerkfunktion zu erwarten ist.

Schwieriger als bei den passiven Netzwerken gestaltet sich die Frage nach der minimalen Gesamtempfindlichkeit bei aktiven Netzwerken, da jetzt die Empfindlichkeiten aktiver und passiver Pa-

parameter ohne Bezugnahme auf eine spezielle Netzwerkkonfiguration miteinander verknüpft werden müßten. Außerdem ergeben sich die optimalen Werte für die Einzelempfindlichkeiten der aktiven Elemente im wesentlichen durch die Art der Nennerpolynomzerlegung, während die entsprechenden Größen bei den passiven Parametern unabhängig davon durch die Summenempfindlichkeiten festgelegt sind. Die pauschale Berechnung einer theoretisch minimalen Gesamtempfindlichkeit etwa für Realisierungen von Übertragungsfunktionen zweiten Grades hat deshalb wenig Sinn.

Insgesamt zeigt es sich, daß bei gleichem Typ der Nennerzerlegung vom Empfindlichkeitsstandpunkt aus keine grundsätzlichen Unterschiede zwischen Realisierungen mit den verschiedenen Arten von aktiven Elementen bestehen. Es muß daher von Fall zu Fall neu entschieden werden, welche Netzwerkkonfiguration für die jeweilige Anwendung am besten geeignet ist.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Bode, H.: Network Analysis and Feedback Amplifier Design. Van Nostrand, New York 1945.
- [2] Director, S.W.; Rohrer, R.A.: The generalized adjoint network and network sensitivities. IEEE Trans. Circuit Theory CT-16 (1969) S.318-323.
- [3] Schoeffler, J.D.: The Synthesis of Minimum Sensitivity Networks. IEEE Trans. Circuit Theory CT-11 (1964) S.271-276.
- [4] Blostein, M.L.: Sensitivity Considerations in RLC-Networks. Ph.D. Dissertation, University of Illinois, Urbana, 1963.
- [5] Holt, A.G.J.; Fidler, J.K.: Summed Sensitivity of Network Functions. Electronics Letters 4 (1968) S.85-87.
- [6] Blostein, M.L.: Sensitivity Analysis of Parasitic Effects in Resistance-Terminated LC-Two-Ports. IEEE Trans. Circuit Theory CT-14 (1967) S.21-25.
- [7] Leeds, J.V.; Ugron, G.I.: Simplified Multiple Parameter Sensitivity Calculation and Continuously Equivalent Networks. IEEE Trans. Circuit Theory CT-14 (1967) S.188-191.
- [8] Schmidt, G.; Kasper, R.: On Minimum Sensitivity Networks. IEEE Trans. Circuit Theory CT-14 (1967) S.438-440.
- [9] Neill, T.B.M.: Second-Order Sensitivity Analysis of a Linear System. Electronics Letters 5 (1969) S.211-212.
- [10] Goddard, P.J.; Spence, R.: Efficient Method for the Calculation of First- and Second-Order Network Sensitivities. Electronics Letters 5 (1969) S.351-352.
- [11] Kishi, G.; Kida, T.: Energy Theory of Sensitivity in LCR-Networks. IEEE Trans. Circuit Theory CT-14 (1967) S.380-387.
- [12] Cauer, W.: Vierpole. Elektr.Nachr.Technik 6 (1929) S.207-218.

- [13] Newcomb, R.W.: The Noncompleteness of Continuously Equivalent Networks. IEEE Trans. Circuit Theory. CT-13 (1966) S.207-218.
- [14] Orchard, H.J.: Inductorless Filters. Electronics Letters 2 (1966) S.224-225.
- [15] Butler, W.J.; Haykin, S.S.: Multiparameter Sensitivity Problems in Network Theory. Proc. IEE 117 (1970) S.2228-2236.
- [16] Cohn, R.M.: The Resistance of an Electrical Network. Proc. Am. Math. Soc. 1 (1950) S.316-324.
- [17] Unbehauen, R.: Elektrische Netzwerke. Berlin, Springer 1972.
- [18] Huber, B.: Toleranzanalyse elektrischer Schaltungen zur Ermittlung der Ausfallrate auf statistischer Grundlage. AEU 23 (1969) S.601-604.
- [19] Wilkinson, R.I.: The Combination of Probability Curves in Engineering. Trans. AIEE 61 (1942) S.953-963.
- [20] Reinschke, K.: Toleranzanalyse elektrischer Schaltungen unter Berücksichtigung statistischer Kompensations- und Überlagerungseffekte. Nachrichtentechnik 17 (1967) S.192-199.
- [21] Holt, A.G.J.; Fidler, J.K.: Optimally Sensitive Networks. Electronics Letters 4 (1968) S.176-178.
- [22] Holt, A.G.J.; Fidler, J.K.: Optimum Sensitivity in Passive Networks. Int. J. Electronics 27 (1969) S.505-510.
- [23] Guillemin, E.A.: Synthesis of passive Networks. John Wiley, New York 1965.
- [24] Haykin, S.S.; Butler, W.J.: Multiparameter Indexes of Performance for Linear-Time-Invariant Networks. Proc. IEE 117 (1970) S.1239-1247.

- [25] Haykin, S.S.: Synthesis of RC Active Filters. Mc Graw-Hill, London 1969.
- [26] Linvill, J.G.: RC Active Filters. Proc. IRE 42 (1954), S.555-564.
- [27] Horowitz, I.M.: Optimization of Negative-Impedance Conversion Methods of Active RC Synthesis. IRE Trans. Circuit Theory CT-6 (1959) S.296-303.
- [28] Merrill, J.L.: Theory of the Negative Impedance Converter. Bell System Tech. J. 30 (1951) S.88-109.
- [29] Calahan, D.A.: Sensitivity Minimization in Active RC Synthesis. IRE Trans. Circuit Theory CT-9 (1962) S.38-42.
- [30] Hakim, S.S.: Synthesis of RC Active Filters with Prescribed Pole Sensitivity. Proc. IEE 112 (1965) S.2235-2242.
- [31] Daggett, K.E.; Vlach, J.: Sensitivity-Compensated Active Networks. IEEE Trans. Circuit Theory CT-16 (1969) S.416-422.
- [32] Holt, A.G.J.; Lee, M.R.: General Rule for the Compensation of the Sensitivity to its Active Devices. Electronics Letters 5 (1969) S.324-325.
- [33] Moschytz, G.S.: Second-Order Pole-Zero Pair Selection for n-th Order Minimum Sensitivity Networks. IEEE Trans. Circuit Theory CT-17 (1970) S.527-534.
- [34] Lee, S.C.: Sensitivity Minimization in Active RC Integrated Circuit Design. Proc. 4.Allerton Conference 1966, S.269-281.
- [34a] Bach, R.E.: Selecting R-C Values for Active Filters. Electronics 22(1960) S.82-85.
- [35] Sallen, R.; Key, E.: A Practical Method of Designing RC-Active Filters. IEEE Trans. Circuit Theory CT-2 (1955) S.74-85.

- [36] Kerwin, W.; Huelsman, L.; Newcomb, R.: State-Variable Synthesis for Insensitive Integrated Circuit Transfer Functions. IEEE J. on Solid-State Circuits SC-2 (1967) S.87-92.
- [37] Bohling, D.M.; O'Neill, L.A.: An interactive computer approach to tolerance analysis. IEEE Trans. Comput. C-19 (1970) S.10-16.
- [38] Blücher, L. von: Zur Toleranzbemessung von Bauelementen in elektronischen Geräten. Wiss. Ber. AEG-Telefunken 41 (1968) S.216-222.
- [39] Moschytz, G.S.: A Note on Pole, Frequency, and Q Sensivity. IEEE J. of Solid-State Circuits SC-6 (1971) S.267-269.
- [40] Butler, E.M.: Realistic design using large-change sensitivities and performance contours. IEEE Trans. Circuit Theory CT-18 (1971) S.58-66.
- [41] Soderstrand, M.A.; Mitra, S.K.: Extremely Low Sensitivity Active RC-Filter. Proc. IEEE 57 (1969) S.2175-2176.
- [42] Reddy, M.A.: Low Sensitivity Amplifier-Filters. NTZ 25 (1972) S.35-40.
- [43] Shirakawa, I.; Temma, T.; Ozaki, H.: Synthesis of Minimum-Sensitivity Networks Through Some Classes of Equivalent Transformations. IEEE Trans. Circuit Theory CT-17 (1970) S.2-8.
- [44] Manaktala, V.K.; Kelly, G.L.: Minimization of Sensitivity of Electrical Networks over a Frequency Interval. Proc. 8. Allerton Conference 1970, S.635-644.
- [45] Reibiger, A.; Reinschke, K.: Über Zusammenhänge zwischen den Systemeigenschaften und Änderungen der Schaltelementewerte bei linearen Vierpolen. Nachrichtentechnik 17(1967) S.372-377.
- [46] Mitra, K.S.: Analysis and Synthesis of Linear Active Networks. John Wiley, New York 1969.
- [47] Unbehauen, R.: Synthese elektrischer Netzwerke. Oldenbourg, München 1972.

- [48] Tarmy, R.; Ghausi, M.S.: Very High-Q Insensitive Active RC Networks. IEEE Trans. Circuit Theory CT-17 (1970) S.358-366.
- [49] Müller, M.: Ein RC-Filter sehr hoher Güte. Mitteilungen der Arbeitsgemeinschaft für elektrische Nachrichtentechnik, Bern no. 12 (1971) S.55-66.
- [50] Reddy, M.A.: High Q, Low Sensitivity RC Amplifier-Filters. Z. elektr. Informations-u. Energietechnik, 2 (1972), H.6.
- [51] Unbehauen, R.; Mayer, A.: Über die Synthese von Übertragungsfunktionen in Form von RC-Gyrator-Kettenschaltungen. AEO 22 (1968) S.61-65.
- [52] Åkerberg, D.; Mossberg, K.: Low-Sensitivity Easily Trimmed Building Block for Active RC-Filters. Electronics Letters 5 (1969) S.528-529.
- [53] Hochwald, W.; McQuade, K.F.; Scheffler, H.S.: Computer Simulation and Analysis Techniques for Reliable Circuit Design. Microelectronics and Reliability 5 (1966) S.97-128.
- [54] Karafin, B.J.: The optimum assignment of component tolerances for electrical networks. Bell System Techn. J. 50 (1971) S.1225-1242.
- [55] Pinel, J.F.; Roberts, K.A.: Tolerance assignment in linear networks using nonlinear programming. IEEE Trans. Circuit Theory CT-19 (1972) S.475-480.
- [56] Neill, T.B.M.: Sensitivity analysis in computer-aided design of linear circuits. Electronics Letters 4 (1968) S.316-317.
- [57] Fidler, J.K.: Calculation of network sensitivities and its application to network analysis. Proc. IEE 118 (1971) S.1569-1572.
- [58] Gutsche, H.: Ein Beitrag zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichten von Systemfunktionen elektrischer Netzwerke. Frequenz 27 (1973) S.45-51.

L e b e n s l a u f

Am 15. November 1942 wurde ich, Bernhard Huber, als erstes Kind des Kaufmanns Bernhard Huber und seiner Ehefrau Maria in Regensburg geboren. Nach der Volksschulzeit von 1948-1953 schloß sich der Besuch der Oberrealschule (jetzt Clavius-Gymnasium) in Bamberg an, wo ich 1962 die Reifeprüfung ablegte. Im WS 1962/63 begann ich an der Universität Erlangen-Nürnberg mit dem Studium der Physik, das ich an derselben Universität im Juli 1968 mit der Diplomprüfung abschloß. Nebenfach bei dieser Prüfung war Elektrotechnik.

Im August 1968 trat ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter in das Institut für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik der Universität Erlangen-Nürnberg ein. Seit März 1971 bin ich im gleichen Institut als Verwalter einer Assistentenstelle tätig. Während dieser Zeit entstand die vorliegende Arbeit.

Erlangen, den 24. 4. 1973

